

# Experimentalphysik Elektrizität und Magnetismus

Thomas Martin Fischer mit Programmiervorlagen von Adrian Ernst

20. Juli, 2021



Für alle Online-Studenten



# Vorwort

Ein wesentlicher Aspekt der Physik ist das Experiment. Eine richtige Vorlesung der Experimentalphysik findet deshalb im Hörsaal H15 statt, wo Thomas Dabisch Experimente vorführen kann, die dem Studenten den Stoff näherbringen soll. Die vorliegende Sammlung an Vorlesungen entstand während des Lock-downs. Ein normaler Vorlesungsbetrieb war nicht mehr möglich und die Vorlesung wurde von heute auf morgen digital. Es gab viele verschiedene Ansätze, wie eine digitale Vorlesung aussehen könnte. Ich hatte mich dazu entschieden, dass mein Gesicht für das Erlernen des Stoffes nicht so wichtig ist und ich auf das traditionelle Vorlesungsskript zurückgreifen würde und den Stoff in einer inverted Classroom Situation (eine so blöde Situation, dass es dafür nicht mal einen deutschen Begriff gibt) über Zoom diskutieren würde. So wurde der Austausch zwischen Studenten und Vorlesenden nicht vollständig unterbunden. Die digitalen Möglichkeiten des Studiums sind allerdings was das Experiment betrifft noch nicht voll ausgeschöpft und ich versuche mit einer Ergänzung der klassischen Übungen durch eigene Experimente die fehlenden direkten Experimente in der Vorlesung zu ersetzen. Die digitale Revolution hat in der Physik längst stattgefunden und wenn wir die digitalen Möglichkeiten tatsächlich nutzen wollen, so in einer Form, die den angehenden Physiker frühzeitig daran gewöhnt, den Computer zur Darstellung komplexer Zusammenhänge zu benutzen und elektrische und magnetische Felder auch graphisch darzustellen. Der Umgang mit mathematischen Programmen und die Darstellung dieser Zusammenhänge mit unterschiedlichen Graphiken erfordert einen zusätzlichen Mehraufwand, der aber belohnt wird durch eine weitere Form des Verständnisses der Phänomene. Ich habe deshalb jede Woche (alle zwei Vorlesungen) auch computergraphische Probleme zum Satz der Aufgaben hinzugefügt die Euch Studenten anregen soll diesen alternative Zugang sich zu eröffnen. Ich hoffe, dass das mit der hier online gestellten Vorlesung gelingt.

Mein Dank geht an Johanna, Gergana und Jonas, die den invertierten Klassenraum mit Leben gefüllt haben, so dass das online-Semester nicht total für die Katz war. An Adrian Ernst und Anna Rossi, die mich in meinem Ansatz motiviert und unterstützt haben.

Bayreuth, im Sommer 2020



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Elektromagnetische Kräfte</b>	<b>3</b>
1.1	Einleitung . . . . .	4
1.2	Superpositionsprinzip . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Vom Coulombgesetz zu den Maxwellgleichungen</b>	<b>13</b>
2.1	Elektrostatik und Maxwellgleichungen . . . . .	14
2.2	Fazit . . . . .	16
2.3	Elektrostatik . . . . .	17
2.4	Übungen . . . . .	20
2.4.1	Gesamtladung . . . . .	20
2.4.2	Elektrischer Fluss, Gaußsche Formulierung des Coulombgesetzes . . . . .	20
2.4.3	Experiment: geladener Tischtennisball . . . . .	20
2.4.4	Programmierung: elektrisches Dreieck . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Das ideale Metall in der Elektrostatik</b>	<b>23</b>
3.1	Das ideale Metall . . . . .	24
3.1.1	Bemerkung 1 . . . . .	27
3.1.2	Bemerkung 2 . . . . .	28
3.1.3	Bemerkung 3 . . . . .	28
3.1.4	Bemerkung 4, Faradaykäfig . . . . .	29
3.1.5	Bemerkung 5 . . . . .	30
3.2	Elektrostatistisches Potenzial . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Beispiele des elektrostatischen Potenzials</b>	<b>35</b>
4.1	Das elektrostatische Potenzial eines Dipols . . . . .	36
4.2	Weitere symmetrische Lösungen für das elektrische Feld . . . . .	37
4.2.1	Geladener Draht . . . . .	37
4.2.2	Geladene Membran . . . . .	38
4.2.3	Geladenen Dipolschicht . . . . .	39
4.2.4	Feld einer homogen geladenen Kugel . . . . .	40
4.2.5	Punktladung vor einer Metalloberfläche . . . . .	41
4.3	Übungen . . . . .	47
4.3.1	Foucaultsches Pendel im Magnetfeld . . . . .	47
4.3.2	Van-de-Graaff-Generator . . . . .	47
4.3.3	Programmierung: Stabladungen . . . . .	47

<b>5</b>	<b>Maxwell Gleichungen mit klassischer Dynamik</b>	<b>49</b>
5.1	Klassische versus quantenmechanische Effekte . . . . .	50
5.1.1	Maxwellgleichungen und klassische Bewegungsgleichungen . . . . .	50
5.1.2	Bewegungsgleichung . . . . .	51
5.1.3	Ein durch elektromagnetische Wellen getriebenes Plasma . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Thermische und quantenmechanische Effekte</b>	<b>57</b>
6.1	Maxwell-Gleichungen und thermodynamisches Gleichgewicht . . . . .	58
6.2	Elektrostatische Energieminimierung mit Unschärferelation . . . . .	61
6.3	Fazit . . . . .	62
6.3.1	I) Elektrostatik und klassische Bewegungsgleichungen . . . . .	62
6.3.2	II) Elektrostatik und thermische Verteilung . . . . .	62
6.3.3	III) Elektrostatik und quantenmechanische Unschärfe . . . . .	62
6.4	Die Kapazität einer Anordnung . . . . .	63
6.5	Elektrostatische Energiedichte . . . . .	64
6.6	Übungen . . . . .	65
6.6.1	Plattenkondensator im Wasser . . . . .	65
6.6.2	Plasmafrequenz und Fußball . . . . .	65
6.6.3	Experiment: Salzige Wasserfarbe . . . . .	66
6.6.4	Programmierung: Bahnen hochenergetischer geladener Teilchen im Dipolfeld . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Dielektrika</b>	<b>69</b>
7.1	Dielektrika . . . . .	70
7.2	Elektrostatische Energiedichte im Dielektrikum . . . . .	71
7.3	Brechungsgesetz für das elektrische Feld . . . . .	72
7.4	Kraft auf ein Dielektrikum . . . . .	73
7.5	Elektrische Felder in dielektrischen Löchern . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>79</b>
8.1	Magnetostatik . . . . .	80
8.2	Kontinuitätsgleichung . . . . .	80
8.3	Kraft auf einen stromdurchflossenen Draht im Magnetfeld . . . . .	82
8.4	Magnetische Flussdichte eines stromdurchflossenen Leiters . . . . .	83
8.5	Magnetische Flussdichte einer stromdurchflossenen Spule . . . . .	84
8.6	Übungen . . . . .	89
8.6.1	Magnetische Flussdichte einer stromdurchflossenen Spule . . . . .	89
8.6.2	Experiment: Smart Phone im Faraday Käfig . . . . .	89
8.6.3	Programmierung: Virtueller Spiegeldipol . . . . .	89
<b>9</b>	<b>Lorentztransformation eines Magnetfeldes</b>	<b>91</b>
9.1	Lorentzkraft auf ein Mitläuferelektron . . . . .	92
9.2	Lorentztransformierte Erklärung . . . . .	92
9.3	Bemerkungen . . . . .	93
9.4	Direkte Lorentztransformation . . . . .	93
9.5	Das Vektorpotenzial . . . . .	94
9.6	Vektorpotenziale symmetrischer Stromanordnungen . . . . .	95
9.7	Fernfeld eines Ringstromes . . . . .	98

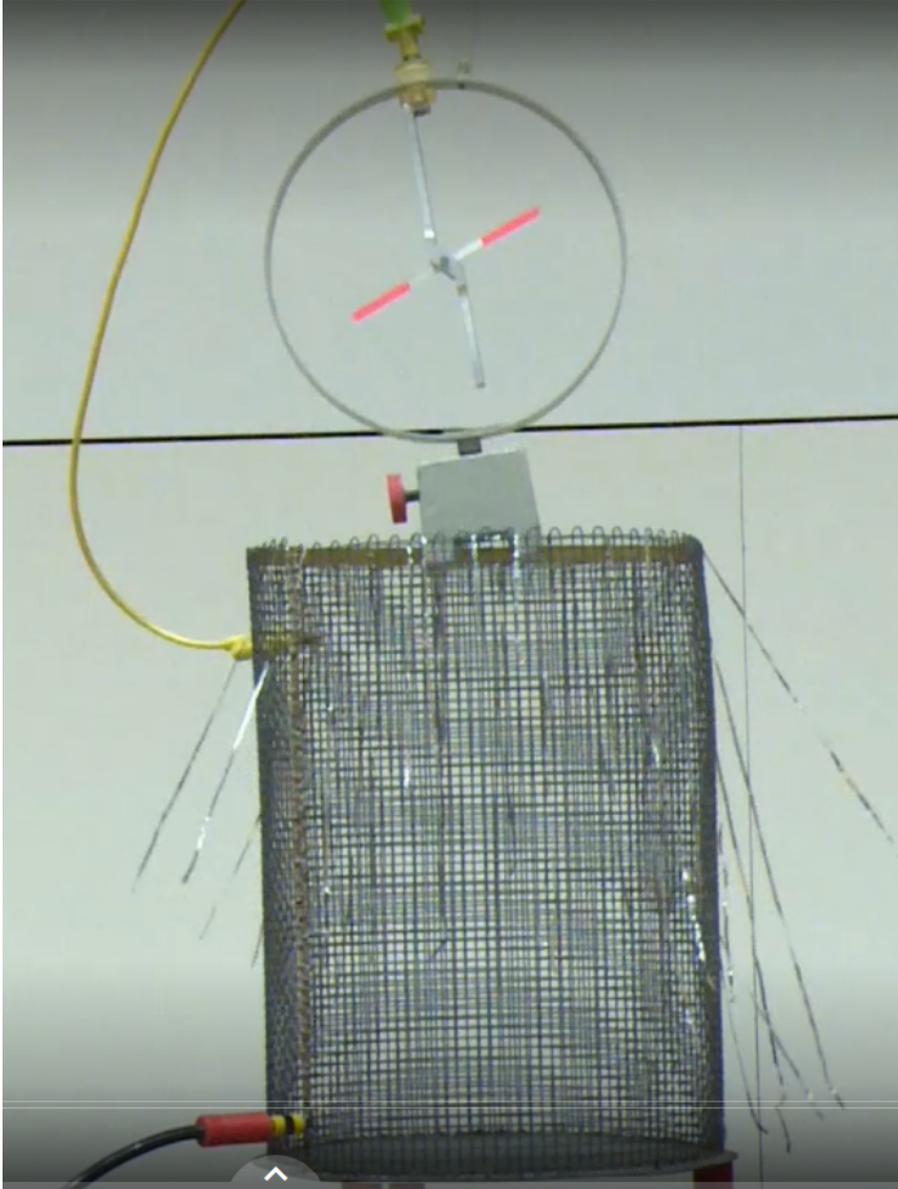
<b>10 Leiterschleifen und magnetische Dipole</b>	<b>103</b>
10.1 Das Gesetz von Biot-Savart . . . . .	104
10.2 Drehmoment auf ein magnetisches Moment . . . . .	105
10.3 Mechanische Energie eines Dipols . . . . .	105
10.4 Kraft auf einen Dipol . . . . .	106
10.5 Energiedichte des <b>B</b> -Feldes . . . . .	107
10.6 Lokale Wirkung des Feldes und Aharonov-Bohm-Effekt . . . . .	108
10.7 Übungen . . . . .	110
10.7.1 Kompassnadel . . . . .	110
10.7.2 Experiment: Brechung des elektrischen Felds . . . . .	110
10.7.3 Programmierung: Würfelkantenstrom . . . . .	110
<b>11 Magnetische Materialien</b>	<b>113</b>
11.1 Magnetische Felder in Materie . . . . .	114
11.2 Schwach magnetisierbare Materie . . . . .	114
11.3 Ferromagnetismus . . . . .	117
11.4 Die Austauschwechselwirkung . . . . .	118
11.5 Intermezzo . . . . .	120
<b>12 Zeitabhängige elektrische Felder</b>	<b>125</b>
12.1 Induktion . . . . .	126
12.2 Wechselstromgenerator . . . . .	131
12.3 Übungen . . . . .	133
12.3.1 Ferroelektrika . . . . .	133
12.3.2 Magnetische Streifenmuster . . . . .	134
12.3.3 Experiment: Unipolarmotor . . . . .	134
12.3.4 Programmierung: Energiedichte des magnetischen Streifenmusters . . . . .	135
<b>13 Induktivitäten</b>	<b>137</b>
13.1 Selbst- und Gegeninduktion . . . . .	138
13.2 Selbstinduktion . . . . .	141
13.2.1 Selbstinduktion einer zylindrischen Spule . . . . .	143
13.2.2 Selbstinduktion eines Koaxialkabels . . . . .	143
<b>14 Elektrisch leitende Materialien</b>	<b>147</b>
14.1 Ideales Metall und das Ohmsche Gesetz . . . . .	148
14.2 Mikroskopisches Verständnis des Ohmschen Gesetzes . . . . .	149
14.3 Ohmsches Gesetz für Halbleiter . . . . .	152
14.4 Elektrolyte . . . . .	153
14.5 Zusammenspiel von elektrischem und Wärmestrom in Metallen . . . . .	154
14.6 Hall Effekt . . . . .	156
14.7 Übungen . . . . .	157
14.7.1 Selbstinduktivität eines Ringes . . . . .	157
14.7.2 Experiment: Fallender Magnet . . . . .	158
14.7.3 Programmierung: Vom Kraftwerk zum Verbraucher . . . . .	158

<b>15 Stromkreise</b>	<b>161</b>
15.1 Stromkreise und Kirchhoff'sche Gesetze . . . . .	162
15.2 Einschaltprozess . . . . .	163
15.3 Schwingkreise . . . . .	164
15.4 Die Impedanz . . . . .	167
<b>16 Über Batterien</b>	<b>173</b>
16.1 Das thermodynamische Gleichgewicht . . . . .	174
16.2 Batterien und Innenwiderstand . . . . .	178
16.3 Bemerkungen . . . . .	179
16.4 Übungen . . . . .	181
16.4.1 Schaltkreis einer meromorphen Funktion . . . . .	181
16.4.2 Wheatstonesche Brücke . . . . .	181
16.4.3 Experiment: Messung komplexer Impedanzen mit zwei Smartphones . . . . .	181
16.4.4 Programmierung: Generator mit komplexer Impedanz . . . . .	181
<b>17 Von der Verschiebungsstromdichte zur Wellengleichung</b>	<b>183</b>
17.1 Nichtstationäre Ströme . . . . .	184
17.2 Fundamentale klassische Physik versus phänomenologische klassische Physik . . . . .	186
17.3 Fouriertransformierte Maxwell Gleichungen . . . . .	187
<b>18 Elektromagnetische Wellen und deren Quellen</b>	<b>191</b>
18.1 Das elektrostatische und das Vektorpotenzial . . . . .	192
18.2 Lösung der inhomogenen Maxwellgleichung mit Nebenbedingung . . . . .	193
18.3 Wellengleichung für den Hertzschen Vektor . . . . .	193
18.4 Eindimensionale Lösung der Wellengleichung mit Quelle . . . . .	194
18.5 Elektrisches Feld und Flussdichte einer ebenen elektromagnetischen Welle . . . . .	196
18.6 Stehende elektromagnetische Welle . . . . .	197
18.7 Fazit . . . . .	198
18.8 Polarisation der elektromagnetischen Welle . . . . .	198
18.9 Übungen . . . . .	201
18.9.1 Abberation . . . . .	201
18.9.2 Laser im Spaceship . . . . .	201
18.9.3 Experiment: In der Mikrowelle . . . . .	201
18.9.4 Programmierung: Ausgedehnte Quellen . . . . .	201
<b>19 Elektromagnetische Wellen in und an Metallen</b>	<b>203</b>
19.1 Lineare Antwort von Elektronen auf elektrische Felder . . . . .	204
19.2 Elektromagnetische Wellen in und an Metallen . . . . .	206
19.3 Normaler und anormaler Skineffekt . . . . .	208
19.4 Oberflächenplasmonen . . . . .	210
<b>20 Reflexion und Hohlraumleiter</b>	<b>215</b>
20.1 Lineare Antwort von Elektronen auf elektrische Felder . . . . .	216
20.2 Reflexionskoeffizient eines Metalls . . . . .	216
20.3 Hohlraumleiter . . . . .	219
20.4 Übungen . . . . .	224

20.4.1 Metallring . . . . .	224
20.4.2 Experiment: Silizium und Metall . . . . .	224
20.4.3 Programmierung: Zylindrischer Hohlraumleiter . . . . .	224
<b>21 Koaxialkabel und Maxwellscher Spannungstensor</b>	<b>227</b>
21.1 Das Koaxialkabel als Cut-off freier und dispersionsfreier Wellenleiter . . . . .	228
21.2 Kraftübertragung und der Spannungstensor . . . . .	232
<b>22 Bilanzgleichungen der Energie und des Impulses</b>	<b>235</b>
22.1 Lokale Erhaltungssätze . . . . .	236
22.2 Energiebilanz . . . . .	237
22.3 Impulsbilanz . . . . .	237
22.4 Dynamische Energie-Impulserhaltung . . . . .	238
22.5 Beispiele für Energiefluß des Feldes . . . . .	239
22.5.1 Laufende Welle . . . . .	239
22.5.2 Stehende Welle . . . . .	239
22.5.3 Aufladen eines Kondensators . . . . .	240
22.6 Übungen . . . . .	242
22.6.1 Lecherleitung . . . . .	242
22.6.2 Einschaltvorgang bei einer Spule . . . . .	242
22.6.3 Experiment: Form eines flexiblen stromdurchflossenen Drahtes . . . . .	242
22.6.4 Programmierung: Bewegter Plattenkondensator . . . . .	242
<b>23 Der Hertzsche Dipol</b>	<b>245</b>
23.1 Skalare Wellengleichung mit Quellterm . . . . .	246
23.2 Weitere mathematische Spielereien . . . . .	246
23.3 Hertzscher Dipol . . . . .	249
23.3.1 Statischen Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ . . . . .	251
23.3.2 Fernfeld $r \rightarrow \infty$ . . . . .	251
23.3.3 Das Nahfeld $0 < r < \lambda = 2\pi/k$ . . . . .	252
23.4 Anpassungsprozesse . . . . .	253
<b>24 Der Hertzsche Dipol und unser Himmel</b>	<b>259</b>
24.1 Region der Anpassungsprozesse . . . . .	260
24.2 Globale Überlegungen zum Hertzschen Dipolfeld . . . . .	260
24.3 Die Farbe unseres Himmels, weiß und blau . . . . .	264
24.4 Übungen . . . . .	266
24.4.1 Quadrupolstrahlung . . . . .	266
24.4.2 Experiment: Himmelspolarisation . . . . .	266
24.4.3 Programmierung: Ablöseprozeß . . . . .	266
<b>25 Spannungstensor und optische Pinzette</b>	<b>269</b>
25.1 Spannungstensor im Dielektrikum . . . . .	270
25.2 Elektromagnetische Wellen im Dielektrikum . . . . .	272
25.3 Reflexion an einer dielektrischen Grenzfläche . . . . .	273

<b>26 Metamaterialien</b>	<b>279</b>
26.1 Elektromagnetische Wellen in dielektrischen und magnetischen Materialien . . . . .	280
26.2 Reflexionskoeffizient zwischen konventionellen und Metamaterialien . . . . .	282
26.3 Reflexion am Metamaterial für $p$ -Polarisation . . . . .	284
26.4 Übungen . . . . .	289
26.4.1 Transmission ins Metamaterial . . . . .	289
26.4.2 Reflexion am Metall . . . . .	289
<b>27 Bau von Metamaterialien und Kramers Kronig Relationen</b>	<b>291</b>
27.1 Mesoskopische Metamaterialien . . . . .	292
27.2 Kausalität und Kramers-Kronig-Relationen . . . . .	293
27.3 Mathematische Eigenschaften analytischer Funktionen . . . . .	294
<b>28 Anhang A: Python - Erste Schritte</b>	<b>297</b>
<b>29 Anhang B: Python - Vorlagen zu den Programmieraufgaben</b>	<b>325</b>





# Kapitel 1

## Elektromagnetische Kräfte

In dieser Vorlesung vergleichen wir die elektromagnetische Wechselwirkung mit der Gravitation und arbeiten die Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Wechselwirkungen heraus. Wir führen den Begriff des elektrischen Feldes und der magnetischen Induktion ein und leiten einen Ausdruck für den elektromagnetischen und Lorentz-invarianten Feldtensor her. Prinzipielle Effekte elektrischer und magnetischer Kräfte werden anhand von auf dem E-learning Server platzierten Videoexperimenten vorgestellt.

## 1.1 Einleitung

Die Elektrodynamik studiert die Wechselwirkung elektrisch geladener Partikel. Wir können elektrische und gravitative Wechselwirkungen miteinander vergleichen: Für die Gravitationskraft zwischen zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  fanden wir in der Mechanik den Ausdruck:

$$\mathbf{F}_{Gravitation}^{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \quad (1.1)$$

wobei  $\gamma = 6.6 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$  die Gravitationskonstante ist. Die Gravitationskraft selbst ist ein Vektor mit Betrag und Richtung, den wir im Unterschied zu einer skalaren Größe, wie der Masse, durch ein fettgedrucktes Symbol abkürzen. Die Richtung der Kraft ist durch den Vektor von der Position der Masse  $m_2$  zur Position der Masse  $m_1$  gegeben

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

wobei  $x_1, y_1$  und  $z_1$  die Komponenten des Vektors  $\mathbf{r}_1$  entlang der drei Raumrichtungen bezeichnen. Den Betrag dieses Vektors bezeichnen wir durch dasselbe Symbol, aber nicht fett, sondern kursiv gedruckt.

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (1.3)$$

Beachten Sie, dass die Gravitationskraft der Masse  $m_1$  auf die Masse  $m_2$  in die umgekehrte Richtung zeigt wie die Gravitationskraft der Masse  $m_2$  auf die Masse  $m_1$ . Massen sind stets positiv und haben deshalb das gleiche Vorzeichen. Deshalb zeigt die Gravitationskraft der Masse  $m_2$  auf die Masse  $m_1$  in Richtung der Masse  $m_2$  und die Wechselwirkung ist attraktiv. Für entgegengesetzte Massen  $m_1 m_2 < 0$  würde die Gravitationskraft der Masse  $m_2$  auf die Masse  $m_1$  von der Masse  $m_2$  weg gerichtet sein, und die Kraft wäre repulsiv. Eine negative Masse wird deshalb aus einem Universum positiver Masse ausgestoßen und taucht in diesem nicht mehr auf. Entgegengesetzte Massen können sich also nicht neutralisieren.

Die elektrostatische Kraft einer elektrischen Ladung  $q_1$  auf eine elektrische Ladung  $q_2$  wird durch die Coulombkraft

$$\mathbf{F}_{Coulomb}^{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} \quad (1.4)$$

beschrieben. Hierbei bezeichnet  $\epsilon_0 = 8.85410 \cdot 10^{-12} \text{As/Vm}$  die Dielektrizitätskonstante,  $q_1$  die erste Ladung und  $q_2$  die zweite Ladung. Die Coulombkraft hat im Prinzip dieselbe Struktur, wie die Gravitationskraft. Die Rolle der Gravitationskonstante übernimmt die Vakuum-Dielektrizitätskonstante. Die Rolle der Massen übernehmen die elektrischen Ladungen  $q_1$  und  $q_2$ . Der fundamentale Unterschied der Coulombkraft und der Gravitationskraft ist das Vorzeichen. Während gleiche Massen sich gravitativ anziehen stoßen sich gleiche Ladungen voneinander ab, und entgegengesetzte Ladungen ziehen sich gegenseitig an.

Betrachten wir das Kräfteverhältnis zwischen zwei geladenen Massen, so ergibt sich

$$\left| \frac{\mathbf{F}_{Gravitation}^{12}}{\mathbf{F}_{Coulomb}^{12}} \right| = \frac{4\pi\epsilon_0\gamma m_1 m_2}{q_1 q_2} \quad (1.5)$$

Betrachten wir zwei geladene Protonen, d. h. wir setzen  $m_1/q_1 \approx m_2/q_2 \approx m_p/e$ , so wird dieses Verhältnis

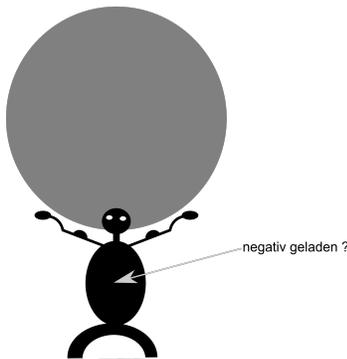


Abbildung 1.1: Erklärung, wie Herakles die Himmelssphäre stemmt.

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\mathbf{F}_{Gravitation}^{12}}{\mathbf{F}_{Coulomb}^{12}} \right| &= 4\pi\epsilon_0\gamma \left( \frac{m_p}{e} \right)^2 \\
 &\approx 10^8 \times 10^{-12} \cdot 6.6 \times 10^{-11} \left( \frac{10^{-30}}{10^{-19}} \right)^2 \\
 &\approx 10^{2-12-11-22} \approx 10^{-43}!!!! \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

Wäre unsere Materie geladen mit einem Ladung-zu-Masse-Verhältnis wie im Atomkern, so wäre die elektrostatische Abstoßung der Atomkerne  $10^{43}$  mal stärker als die gravitative Anziehung! Die Gravitation ist eine vergleichsweise winzige Wechselwirkung im Vergleich zur elektrostatischen Wechselwirkung.

In den griechischen Mythen vertritt Herakles kurzzeitig Atlas und stemmt die Himmelssphäre für ihn. Wir folgern daraus, dass Herakles wahrscheinlich geladen war: Eine ein-prozentige Diskrepanz zwischen der Menge an Elektronen und Protonen in Herakles kriert so viel elektrostatische Energie, dass Herakles die Erdkugel (ich weiß, wie viel die wiegt, aber nicht genau, wie viel die Himmelssphäre, - was immer das genau ist-, wiegt) problemlos um zwei Meter nach *oben* heben kann.

Weil die elektromagnetische Wechselwirkung so viel größer ist als die Gravitation, ist das Bestreben von Ladungen sich gegenseitig zu neutralisieren enorm. Wir sehen dieses Bestreben bei zwei sich gegenüberstehenden, aufgeladenen Kondensatorplatten, zwischen die wir mit einem isolierenden Faden einen graphitbeschichteten und damit leitenden Tischtennisball hängen. Der Tischtennisball dopst zwischen den beiden Platten hin und her, läßt sich dabei bei jeder Plattenberührung um, und bringt die beiden Platten letztendlich wieder in den ungeladenen Zustand. Ein Video dieses Versuches befindet sich unter Thema 1 auf dem E-learning server.

Auf der Längenskala des Menschen ist praktisch alle Materie neutral. Die Anzahl der Protonen im Material  $N_p = N_e$  gleicht der Anzahl der Elektronen. Die Materie ist auf großen Skalen neutral, so dass die elektromagnetische Wechselwirkung verschwunden scheint. Es bleibt die Gravitation als nicht neutralisierbare Wechselwirkung übrig.

Als Newton unterm Apfelbaum lag und über den fallenden Apfel nachdachte, entdeckte er die Gesetze der Gravitation. Das Platzen des Apfels beim Aufprall auf den Boden interessierte ihn dabei weniger. Wir können uns fragen, warum der Apfel kaputt geht, wenn er runter fällt. Der Apfel

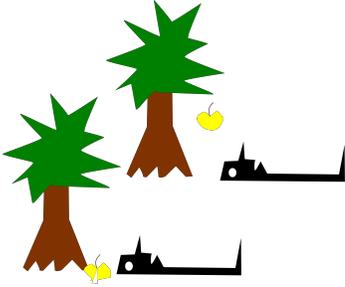


Abbildung 1.2: Newton, Gravitation und elektromagnetische Wechselwirkung.

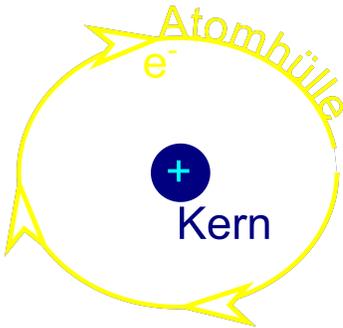


Abbildung 1.3: Warum fällt das Elektron nicht in den Kern?

ist während des Fallens schwerelos und spürt die Gravitation nicht. (Genauer wird natürlich das Unterteil des Apfels stärker angezogen als das Oberteil des Apfels, weil die Erdbeschleunigung mit der Höhe leicht abnimmt  $g = g(z)$ . Der Apfel steht also während des Fallens unter Zugspannung und wird dadurch gedehnt. Die Dehnung des Apfels ist dabei klein, weil elektromagnetische Wechselwirkungen den Apfel zusammenhalten). Wenn der Apfel auf den Boden aufkommt, müsste er die Elektronen und Protonen des Bodens aus ihrer neutralen Position zur Seite schieben, um in seinem Bewegungszustand zu verharren. Dem widersetzen sich die Protonen und Elektronen des Bodens und bremsen deshalb den Apfel ab. Der unangenehme Aufprall des Apfels auf dem Boden besteht aus elektromagnetischen Kräften, die dem Apfel weh tun. Das Abbremsen des Apfels geschieht auf einer kleineren Längenskala als das gravitative Beschleunigen.

Wir wissen, dass die Elektronen und Protonen sich über die Coulombkraft (Gleichung 1.4) anziehen. Warum fallen beide Teilchen dann nicht ineinander? Die Antwort auf diese Frage erfolgt im Rahmen der Quantenmechanik: Die Unschärferelation hält das Elektron davon ab, im Atomkern zu ruhen. Wir wissen, daß Protonen sich über die Coulombkraft (Gleichung 1.4) abstoßen. Wie können dann alle Protonen im Kern bleiben? Die Antwort auf diese Frage führt uns zu weiteren fundamentalen nicht elektromagnetischen Wechselwirkungen. Die starke Wechselwirkung zwischen den Protonen ist anziehend und hält diese im Kern zusammen. Jedoch wird bei zu vielen Protonen im Kern die Coulombkraft so stark, dass schwere Elemente instabil werden und über Kernzerfall in leichtere Kerne zerfallen. Die beim Kernzerfall frei werdende Kernenergie ist im wesentlichen auf die Coulombabstoßung der Protonen zurückzuführen. Damit ist der Hauptanteil der Kernenergie elektromagnetische Energie.

Wenn das Elektron geladen ist, stoßen sich die Partialladungen des Elektrons gegenseitig ab. Warum fliegt die Ladung des Elektrons nicht auseinander? Die Antwort auf diese Frage ist bis heute nicht gefunden.

Die Coulombkraft zwischen Ladungen (Gleichung 1.4) gilt nur für ruhende Ladungen. Bewegte Ladungen verhalten sich komplizierter. Das Verständnis der Kräfte auf bewegte Ladungen wird einfacher, wenn wir den Begriff des elektromagnetischen Feldes verwenden: Bewegte Ladungen erzeugen ein elektromagnetisches Feld. Eine sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegend Ladung in einem elektromagnetischen Feld spürt eine Kraft

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \cdot q \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

, wobei  $\mathbf{E}$  das elektrische Feld und  $\mathbf{B}$  die magnetische Induktion (oder auch magnetische Flußdichte) bezeichnet. Umgangssprachlich kursiert zu  $\mathbf{B}$  auch der Name Magnetfeld. Wir weisen darauf hin, dass mit dem Magnetfeld  $\mathbf{H}$  in der Physik ein eng verwandtes, aber nicht das gleiche Feld gemeint ist und bitten Sie, die Begriffe in ihrem physikalisch definierten Sinn, nicht im umgangssprachlichen Sinn zu benutzen. Den Begriff des Magnetfelds werden wir in einem späteren Abschnitt genauer erläutern. Die Leistung der Ladung ist negativ, wenn die Kraft und Geschwindigkeit in die gleiche Richtung zeigen; die Ladung saugt dann Energie aus dem Feld. Die Leistung der Ladung beträgt:

$$P = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{E} \cdot q\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \end{pmatrix} \cdot q \begin{pmatrix} 1 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Wir können Gleichung 1.8 und 1.7 zu

$$\begin{pmatrix} P \\ c\mathbf{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot q \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix} \cdot q \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

kombinieren, indem das elektromagnetische Feld als schiefsymmetrischer Tensor

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

auftaucht. Die Verzerrung der Vektoren und Tensoren mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  nehmen wir vor, um jedes Element des Vektors und Tensors dieselbe physikalische Einheit (Leistung, Elektrisches Feld bzw. Geschwindigkeit) haben zu lassen. Statt des normalen Skalarprodukts  $\cdot$  wollen wir das Viereskalarprodukt:

$$\cdot_4 = \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

benutzen. Wir können jetzt unter dem elektromagnetischen Feld entweder das Vektorpaar  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  oder gleich den Feldtensor  $\mathcal{F}$  verstehen.

Wenn wir uns mit einem van de Graph Generator aufladen lassen, indem wir uns gegen den Boden isolieren, den Van-de-Graph Generator berühren, bevor wir ihn einschalten, erzeugt die Überschussladung unseres Kopfes ein elektrisches radial nach außen gerichtetes Feld, indem die ebenfalls aufgeladenen Haare eine Probeladung darstellen, an denen jetzt radial nach außen gerichtete elektrische Kräfte angreifen. Sind die Haare lang und dünn genug, was zu einer niedrigen Biegesteifigkeit führt, die umgebende Luft trocken und damit isolierend genug, lässt sich damit die natürliche Frisur so verändern, dass die Haare zumindest an ihren Spitzen sich nicht mehr dem Gravitationsfeld anschmiegen, sondern dem elektrischen Feld folgend radial nach außen gezogen werden. Auf dem E-learning Server führt dies Anna Rossi, meine Doktorandin und Starfriseurin vor. Wir haben damit den Effekt der elektrostatischen Kraft (des geschwindigkeitsunabhängigen Anteils der elektromagnetischen Kraft) gezeigt.

In einem Fadenstrahlrohr (einem mit einem Leuchtgas gefüllten Glasbehälter) wird mittels eines erhitzten Metalls eine freie Elektronenwolke über dem Metall erzeugt. Die Elektronen in der Elektronenwolke werden in Richtung eine positiv geladenen Gitters beschleunigt, und so wird ein Elektronenstrahl erzeugt, der mit einer von der Beschleunigungsspannung abhängigen Geschwindigkeit durchs Leuchtgas saust und dieses durch Stöße zum Leuchten bringt. Der Elektronenstrahl wird also sichtbar. Mittels eines Elektromagneten können wir den Effekt der Lorentzkraft, nämlich des geschwindigkeitsabhängigen Teils der elektromagnetischen Kraft, studieren. Der Elektronenstrahl wird um die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  gewickelt. Je stärker die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  ist, umso kleiner ist der Krümmungskreis des Elektronenstrahls. In einem homogenen magnetischen Flußdichtefeld schließt sich die Elektronenbahn zu einem Kreis, wenn die Elektronen senkrecht zu Feld eingeschossen werden. In inhomogenen Feldern kommt es zu komplizierteren Elektronenbahnen die sich um die magnetischen Flussdichtelinien herumwickeln. Ein Video hierzu wird auf dem E-learning Server dazu vorgeführt.

Auch für geladene Teilchen bewirkt die elektromagnetische Kraft eine Änderung des Impulses des Teilchens, und es gilt:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m_{dyn} \mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \quad (1.13)$$

Mit Gleichung 1.13 lässt sich beschreiben, wie sich ein geladenes Teilchen in einem elektromagnetischen Feld bewegt. Zu einer vollständigen Beschreibung müssen wir wissen, wie die elektromagnetischen Felder erzeugt werden.

## 1.2 Superpositionsprinzip

Die Coulombkraft (Gleichung 1.4) können wir auffassen, als die Kraft, die auf Ladung 1 in einem von Ladung 2 erzeugten elektrischen Feld an der Stelle der Ladung 1 erzeugt wird.

$$\mathbf{F}_{Coulomb}^{12} = q_1 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1) \quad (1.14)$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}^*) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{*2}^2} \frac{\mathbf{r}_{*2}}{r_{*2}} \quad (1.15)$$

Beachten Sie, dass wir durch die Aufteilung der Gleichung ein elektrisches Feld an einer beliebigen Stelle  $\mathbf{r}^*$  erklärt haben, an der es vielleicht gar keine andere Ladung gibt. Wir behaupten, dass das elektrische Feld da ist, auch wenn keiner es mit einer Ladung testet. Beachten Sie weiterhin, dass das elektrische Feld eine lineare Funktion der erzeugenden Ladung  $q_2$  ist. Wenn wir die Ladung an der Stelle  $\mathbf{r}_2$  verdoppeln, verdoppelt sich das elektrische Feld im Raum. Dieses Prinzip lässt sich erfolgreich verallgemeinern, dahingehend, dass auch das Feld einer Ansammlung von an unterschiedlichen Stellen platzierten Ladungen eine lineare Funktion und damit additive Funktion der von den Einzelladungen erzeugten Einzelelektrischenfelder ist. Das Superpositionsprinzip gilt auch für bewegte Ladungen: Wenn eine Ansammlung 1 an Ladungen sich auf eine bestimmte Art und Weise 1 bewegt und eine zweite Ansammlung 2 sich auf auf eine bestimmte Art und Weise 2 bewegt so ist das Gesamtfeld beider Ansammlungen die Summe der Einzelfelder, sofern sich die Teilsysteme 1 und 2 in der Präsenz des jeweils anderen Teilsystems genauso bewegen als wäre das andere Teilsystem nicht da. Reagiert das Teilsystem 2 auf das Teilsystem 1 mit einer Abänderung der Bewegung oder Position, so ist das Gesamtfeld nicht die Summe der sich vorher anders bewegenden Teilsysteme. Im Experiment beeinflussen sich beide Teilsysteme, da beide Systeme miteinander über elektromagnetische Kräfte wechselwirken, und das Gesamtsystem hat nicht das elektromagnetische Feld der sich vorher anders bewegenden Einzelsysteme. Trotzdem ist das Superpositionsprinzip ein nützliches theoretisches Konzept, mit dem wir elektromagnetische Felder eines Gesamtsystems, bei dem wir die Positionen und Bewegungen der Teilsysteme aus irgend einem Grund unter Kontrolle haben, aus den Einzelsystemen theoretisch zusammenbasteln können.

Theoretisch haben wir damit das elektromagnetische Feld einer Ansammlung von Ladungen verstanden, wenn wir das Feld einer Einzelladung verstanden haben.

Die Idee, das elektromagnetische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  sei auch da, wenn keine Probeladung  $q$  da ist, die zu einer Kraft auf diese führt, macht das elektromagnetische Feld zu einem realen Objekt, welches für jeden Ort und zu jeder Zeit den Raum charakterisiert.

Wir haben mit Gleichung 1.15 lediglich erklärt, welches Feld von einer sich nicht bewegenden Ladung  $q_2$  erzeugt wird. Gleichung 1.15 kann nicht benutzt werden für Felder bewegter Ladungen. Eine mit Lichtgeschwindigkeit auf uns zu fliegende weit entfernte Ladung können wir nicht messen, da das elektrische Feld der Ladung mit Überlichtgeschwindigkeit bei uns eintreffen müsste. Gleichung 1.15 beschreibt ein Feld, welches instantan auch bei weiten Entfernungen von der Ladung sofort da ist. Gleichung 1.15 kann deshalb für bewegte Ladungen nicht mehr richtig sein.

Der Weg, der hier zu einer richtigen Beschreibung führt, wird sein, die Coulombkraft so umzuschreiben, dass sie Lorentz-invariant wird und im statischen Fall unbewegter Ladungen mit der Coulombkraft (Gleichung 1.4) übereinstimmt.

Das elektromagnetische Feld haben wir bereits Lorentz-invariant aufgeschrieben (Gleichung 1.11). Wenn wir eine ruhende Ladung mit elektrischem Coulombfeld haben, müssen wir in ein bewegtes Bezugssystem mit Lorentztransformationen  $\mathcal{L}(\mathbf{v})$  transformieren, um eine bewegte Ladung zu erhalten. Das elektromagnetische Feld transformiert sich dann wie

$$\mathcal{F}' = \mathcal{L}(\mathbf{v})^{-1} \cdot_4 \mathcal{F} \cdot_4 \mathcal{L}(\mathbf{v}) \quad (1.16)$$

ins bewegte Bezugssystem. Dabei wandeln sich elektrische Felder und magnetische Flussdichten partiell ineinander um. Das Relativitätsprinzip fordert also eine verallgemeinerte elektromagnetische Theorie, bei der  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Felder nicht mehr zwei unabhängige, verschiedene Dinge mehr sind.





## Kapitel 2

# Vom Coulombgesetz zu den Maxwellgleichungen

In dieser Vorlesung schreiben wir zunächst das Coulombgesetz um, benutzen das Superpositionsprinzip und erhalten so die Grundgesetze der Elektrostatik als partielle Differentialgleichungen für das elektrische Feld. Die Forderung der Lorentzinvarianz führt dann zu den Maxwell-Gleichungen, welche die Grundgleichungen für alle elektromagnetischen Phänomene sind. Interessanterweise findet man im statischen Limes, wenn sich nichts mit der Zeit verändert, nicht nur die Grundgleichungen der Elektrostatik wieder, sondern auch die Grundgleichungen der Magnetostatik. Wir eröffnen einen phänomenologischen Weg zur Beschreibung elektrostatischer Effekte in Materie, indem wir Ladungen und Felder in kontrollierbare Anteile und reagierende Anteile aufteilen. Wie ein Material reagiert, wird durch konstituierende Gleichungen beschrieben, die wir aber erst in der Vorlesung 3 besprechen werden.

## 2.1 Elektrostatik und Maxwellgleichungen

Das statische elektrische Feld vermittelt eine konservative Kraft, für die die Energieerhaltung gilt. Sei  $A$  eine beliebige Fläche mit dem Rand  $\partial A$ , der eine geschlossene Kurve ist. Dann verschwindet die Arbeit, die notwendig ist, um eine Ladung längs dieser Kurve herumzuführen:

$$\Delta W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 = q \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \stackrel{\text{Satz von Stokes}}{=} q \int \int_A \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.1)$$

Da diese Fläche beliebig ist und die Ladung  $q \neq 0$  nicht verschwindet, muss der Integrand unter dem Flächenintegral verschwinden. Wir finden

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2.2)$$

Die Energieerhaltung erfordert ein wirbelfreies elektrisches Feld.

Wir erinnern an Vorlesung 1, in der wir für das Feld einer Ladung 1 an der Stelle einer Probeladung 2 das elektrische Coulombfeld

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{21}^2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}} \quad (2.3)$$

gefunden hatten. Wir können die Ladung  $q_1$  wie folgt schreiben:

$$\frac{q_1}{\epsilon_0} = \frac{q_1}{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi r_{21}^2} 4\pi r_{21}^2 \left( \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}} \cdot \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}} \right) \quad (2.4)$$

$$= \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) \cdot \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}} 4\pi r_{21}^2 \quad (2.5)$$

$$= \int \int_{\text{Kugeloberfläche um } q_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) \cdot \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}} dA_2 \quad (2.6)$$

$$= \int \int_{\text{Kugeloberfläche um } q_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{A}_2 \quad (2.7)$$

$$\stackrel{\text{Satz von Gauss}}{=} \int \int \int_{\text{Kugelvolumen}} dV \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (2.8)$$

Andererseits lässt sich die Ladung  $q_1$  ausdrücken als Integral über eine dreidimensionale Deltafunktion.

$$\frac{q_1}{\epsilon_0} = \int \int \int_{\text{Kugelvolumen}} dV \frac{q_1}{\epsilon_0} \delta^3(\mathbf{r}_{21}) \quad (2.9)$$

$$\int \int \int_{\text{Kugelvolumen}} dV \frac{q_1}{\epsilon_0} \delta(x_{21}) \delta(y_{21}) \delta(z_{21}) \quad (2.10)$$

$$(2.11)$$

Für eine Punktladung  $q_1$  gilt für das elektrische Feld an der Stelle 2 die Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) = \frac{q_1}{\epsilon_0} \delta^3(\mathbf{r}_{21}). \quad (2.12)$$

Für viele Ladungen an den Positionen  $\mathbf{r}_i$  definieren wir die Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.13)$$

und erhalten damit unter Benutzung des Superpositionsprinzip

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \quad (2.14)$$

Die Ladungen sitzen an den Punkten nicht verschwindender Ladungsdichte und sind die Quellen des elektrischen Feldes.

Wir haben mit den Gleichungen 2.2 und 2.14 das Coulombgesetz in die Grundgleichungen der Elektrostatik umgeschrieben, die wir hier nochmals zusammenfassen:

$$I \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{homogene elektrostatische Maxwellgleichung} \quad (2.15)$$

( $\epsilon_{3d} \cdot \nabla \mathbf{E} = \mathbf{0}$ )

$$II \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{inhomogene elektrostatische Maxwellgleichung.} \quad (2.16)$$

Das Kreuzprodukt in der homogenen elektrostatischen Maxwellgleichung können wir auch als Verjüngung des dreidimensionalen Levi-Civita-Tensors  $\epsilon_{3d}$  mit dem äußeren Vektorprodukt des Nablaoperators mit dem elektrischen Feld schreiben. Die dynamischen Maxwellgleichungen folgen dann aus der Forderung der Lorentzinvarianz der Gleichungen mit der Verallgemeinerung:

$$\mathbf{0} = \epsilon_{4d} \cdot \left( \begin{array}{c} -\partial_t \\ c\nabla \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{cccc} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{array} \right), \quad (2.17)$$

indem wir den Feldtensor mit dem Vierernablaoperator differenzieren und den daraus entstehenden dreistufigen Tensor mit dem vierdimensionalen Levi-Civita-Tensor zu einem Vierervektor verjüngen. Nach aus-multiplizieren von 2.17 erhalten wir die beiden homogenen Maxwellgleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

und

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.19)$$

Ganz entsprechend verallgemeinern wir die inhomogene statische Maxwellgleichung zu den inhomogenen Maxwellgleichungen:

$$\left( \begin{array}{c} -\partial_t \\ c\nabla \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{cccc} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & cB_z & -cB_y \\ -E_y & -cB_z & 0 & cB_x \\ -E_z & cB_y & -cB_x & 0 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \rho c \\ \rho \mathbf{v} \end{array} \right) \quad (2.20)$$

mit der Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (2.21)$$

Aus-multiplizieren der lorentzinvarianten Gleichung 2.20 liefert die inhomogenen Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.22)$$

und

$$c \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} = \frac{1}{c \epsilon_0} \mathbf{j}. \quad (2.23)$$

## 2.2 Fazit

Wir erhalten die Gleichungen der Elektrostatik aus dem Coulombgesetz und dem Superpositionsprinzip. Diese lauten

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.25)$$

Relativistische Lorentzinvarianz führt zur Erweiterung der Gleichungen zu den Maxwellgleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{j} \quad (2.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.29)$$

Die Gleichungen werden geschlossen durch die klassischen Bewegungsgleichungen für die Ladungen

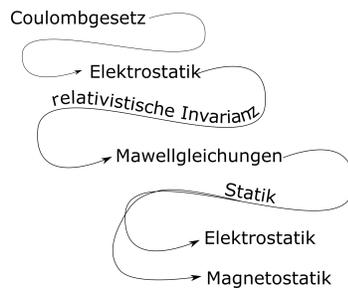
$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_{0,i} \mathbf{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} \right) = q_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}). \quad (2.30)$$

Wenn wir zurück zur Statik gehen, bei der es keine zeitlichen Veränderungen gibt, also alle Zeitableitung  $\partial_t = 0$  verschwinden, so erhalten wir zum einen die Gleichungen der Elektrostatik zurück:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.32)$$

aber zusätzlich die Gleichungen der Magnetostatik:



**Abbildung 2.1:** Vom Coulombgesetz zu den Maxwellgleichungen zurück zur Elektrostatik und Magnetostatik

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j} \quad (2.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.34)$$

Wir haben also die folgende in Figur 2.1 abgebildete Schlusskette geführt.

Der Rest der Vorlesung dieses Semesters wird sich mit den Phänomenen befassen, die durch die Maxwellgleichungen beschrieben werden.

Zunächst werden wir die Elektrostatik besprechen, anschließend die Magnetostatik und erst zum Schluss die vollen Phänomene der Elektrodynamik.

## 2.3 Elektrostatik

Wir untersuchen die Gesetze der Elektrostatik: Wir beginnen mit der inhomogenen elektrostatischen Maxwellgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.35)$$

und bemerken, dass das elektrische Feld eine nicht verschwindende Divergenz hat,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0 \quad (2.36)$$

nur an den Stellen im Raum, an denen Ladungen sitzen. Im Vakuum hingegen ist das elektrische Feld divergenzfrei:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.37)$$

Wir betrachten ein evakuiertes (ladungsfreies) Volumen  $V$  und bezeichnen mit  $A = \partial V$  den Rand des Volumens. Wir können diesen Rand einteilen in einen Bereich  $A_-$ , in dem das elektrische Feld in das Volumen hinein zeigt, der nach außen zeigende Normalenvektor  $\mathbf{n}$  also ein negatives Skalarprodukt  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} < 0$  mit dem elektrischen Feld hat, und einen Bereich  $A_+$ , in dem  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} > 0$  gilt. In Figur 2.2 haben wir so ein Volumen skizziert.

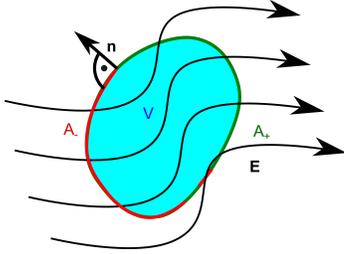


Abbildung 2.2: Eine Feldlinie im Vakuum hört nicht auf.

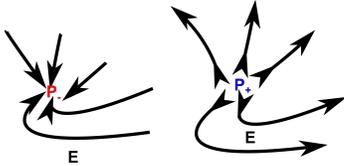


Abbildung 2.3: Klassisch stabile Punkte für positive und negative Ladungen gibt es nicht im Vakuum.

Wir wenden die inhomogene Maxwellgleichung der Elektrostatik auf das evakuierte Volumen an und benutzen den Satz von Gauß:

$$0 = \int_V 0 dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV \stackrel{\text{Satz von Gauss}}{=} \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} dA = \int_{A_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}| dA - \int_{A_-} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}| dA \quad (2.38)$$

und folgern, dass gilt

$$\int_{A_+} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}| dA = \int_{A_-} |\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}| dA, \quad (2.39)$$

was bedeutet, dass eine  $\mathbf{E}$ -Feldlinie die über die Fläche  $A_-$  in das Volumen  $V$  hineinführt dieses Volumen auch wieder verlassen muss, und zwar durch die Fläche  $A_+$ . In einem Vakuum führen genauso viele Feldlinien über  $A_-$  in das Volumen hinein wie über  $A_+$  wieder hinausfließen. Eine Feldlinie im Vakuum hört nicht auf!

Es gibt deshalb im Vakuum weder einen Punkt  $P_-$  wie in Figur 2.3, wo nur Feldlinien hin-, noch einen Punkt  $P_+$ , wo nur Feldlinien wegfließen.

Beachten Sie, dass das elektrische Feld die Kraft pro Ladung einer Probeladung angibt, welche die Probeladung spürt. In Punkten  $P_-$  bzw.  $P_+$  könnte eine Probeladung des richtigen Vorzeichens stabil sitzen, da sie beim Auslenken aus der Position vom Feld in diesen Punkt zurückgedrängt würde. Solche Punkte gibt es aber im Vakuum nicht, und dabei bleibt die einzige klassisch stabile Position für eine positive (negative) Probeladung, sich auf eine entgegengesetzt geladene negative (positive) Ladung zu setzen.

Es folgt, dass es keine klassisch stabilen Konfigurationen von Ladungen gibt.

Daraus folgt, dass man den Aufbau der Materie klassisch nicht erklären kann.

Die Schlussfolgerung, dass es sich bei den Maxwellgleichungen deshalb um unsinnige Gleichungen handelt, ist allerdings nicht richtig. Vielmehr sind die klassischen Bewegungsgleichungen 2.30 für die Erklärung der Stabilität von Materie unbrauchbar.

Für eine grundlegende Erklärung der Stabilität der Materie müssen wir die klassischen Bewegungsgleichungen für die Ladungen durch quantenmechanische Bewegungsgleichungen ersetzen. Die Maxwellgleichungen können dazu weiter benutzt werden. Wir können diesem fundamentalen Weg im jetzigen Stadium Ihres Studiums noch nicht folgen und wählen deshalb einen phänomenologischen Weg.

Hierzu teilen wir die Ladungsdichte in zwei Klassen von Ladungsdichten ein.

Eine externe Ladungsdichte  $\rho_{ext}$ , die wir im Experiment vollkommen unter Kontrolle haben und gezielt an einem gewünschten Ort platzieren können, und eine interne Ladungsdichte  $\rho_{intern}$ , die wir nicht unter Kontrolle haben und die sich aufgrund unserer Manipulation der externen Ladungsdichte entsprechend gewisser materialabhängiger konstituierender Gleichungen umsortiert.

Diese theoretische Klassifizierung (eine Ladung weiß nicht, ob sie unter unserer Kontrolle ist oder nicht, sie folgt den physikalischen Gesetzen) erfordert eine entsprechende klassifizierende Aufspaltung der Felder.

Wir schreiben also

$$\rho_{gesamt} = \rho_{ext} + \rho_{int} \quad (2.40)$$

und

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{gesamt}}{\epsilon_0} \quad (2.41)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext} \quad (2.42)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_{int} \quad (2.43)$$

$$\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}, \quad (2.44)$$

wobei wir das elektrische Feld in eine dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  und eine Polarisation  $\mathbf{P}$  aufgeteilt haben. Dass diese neuen Felder nicht dieselben Einheiten wie das elektrische Feld haben und auch verschiedene Vorzeichen haben, hat historische Gründe.

Wir finden also, dass

$$\rho_{ext} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_{ext} = \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (2.45)$$

experimentell kontrollierbar ist,

$$\rho_{int} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}_{int} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (2.46)$$

die Reaktion des Materials auf das externe Feld (die externen Ladungen) beschreibt und das Gesamtfeld

$$\mathbf{E}_{gesamt} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{int} \quad (2.47)$$

die Summe der kontrollierbaren Felder und reagierenden Felder ist.

Die Gleichungen der Elektrostatik in Materie schreiben sich dann als

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext} \quad (2.48)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.49)$$

$$\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}, \quad (2.50)$$

in denen die nicht kontrollierbaren Ladungen nicht mehr explizit vorkommen. Die Gleichungen werden geschlossen durch eine konstituierende Gleichung für  $\mathbf{P}(\mathbf{D})$ , die beschreibt, wie in einem bestimmten Material die internen Ladungen auf externe Störungen reagieren.

Die konstituierenden Gleichungen müssen Sie im jetzigen Stadium Ihres Studiums als gottgegeben akzeptieren. Sie werden im weiteren Verlauf des Studiums mit Hilfe quantenmechanischer Methoden unter bestimmten Annahmen über das Material abgeleitet. In der nächsten Vorlesung werden wir konstituierende Gleichungen von einigen Materialien kennen lernen.

## 2.4 Übungen

### 2.4.1 Gesamtladung

Wie viele Coulomb an positiver Ladung befinden sich in 1 kg Kohlenstoff?

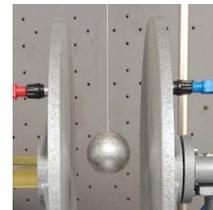
### 2.4.2 Elektrischer Fluss, Gaußsche Formulierung des Coulombgesetzes

Im Zentrum eines Würfels befindet sich eine positive Punktladung  $q$ .

- Berechnen Sie mit Hilfe von Symmetrieüberlegungen den elektrischen Fluss  $\int \mathbf{E} \cdot d^2A$  durch eine Fläche des Würfels (ohne explizite Integration!).
- Nun befindet sich die positive Punktladung  $q$  nicht mehr im Zentrum des Würfels, sondern an einer Würfecke. Bestimmen Sie auf gleiche Weise den elektrischen Fluss durch jede Würfel- fläche.

### 2.4.3 Experiment: geladener Tischtennisball

Bemalen Sie einen Tischtennisball mit einem Bleistift oder beschichten Sie ihn anderweitig mit Graphitspray. Besorgen Sie sich ein Fell und Kunststoffstab (Seidenbluse und Glasstab), zwei Bleche (Konservendosen o. ä.) und was zum Isolieren. Bauen Sie den Tischtennisballversuch nach. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein damit der Tischtennisball zwischen zwei aufgeladenen Platten so auf und abspringt, dass er bei einem vertikalen statt horizontalen Aufbau jedesmal wieder die obere Platte erreicht?



**Abbildung 2.4:** Beschichteter Tischtennisball im Plattenkondensator

### 2.4.4 Programmierung: elektrisches Dreieck

*Hinweise zu den Programmieraufgaben:*

*Wir empfehlen die Nutzung von Python mit einigen Zusatzpaketen. Eine Anleitung zur Einrichtung befindet sich im Anhang A. Für manche Übungen (wie für diese) existieren zum leichteren Einstieg auch Vorlagen im Anhang B. Diese können, müssen aber nicht genutzt werden. Wer möchte kann auch die Software/Programmiersprache seiner Wahl benutzen.*

Plotten Sie das elektrische Feld dreier Punktladungen  $q_1, q_2$  und  $q_3$  ( $q_1 = q_2 = -q_3/2$ ), welche in einem gleichseitigen Dreieck sitzen. Wie schaut das Vektorfeld im Dreieck aus? Wie sieht es weit weg vom Dreieck aus? In welchem Punkt des Dreiecks verschwindet das elektrische Feld? Wie sehen die Feldlinien in der Umgebung dieses Punktes aus? Wie schaut die Feldlinie durch diesen Punkt aus?



## Kapitel 3

# Das ideale Metall in der Elektrostatik

In dieser Vorlesung untersuchen wir das Verhalten eines idealen Metalls, sowie Konsequenzen, die sich in der Umgebung eines Metalls durch seine elektrostatischen Eigenschaften ergeben. Wir drücken die Oberflächenladungsdichte eines Metalls durch seine Polarisierung  $\mathbf{P}$  aus und finden eine Randbedingung für das elektrische Feld an der Metall/Vakuum-Grenzfläche. Wir behandeln die Austrittsarbeit eines Elektrons aus dem Metall und behandeln den Faraday Effekt. Wir zeigen die Existenz eines elektrostatischen Potentials und leiten die Poisson-Gleichung her.

### 3.1 Das ideale Metall

In Vorlesung 2 haben wir die Gleichungen der Elektrostatik in Materie besprochen. Sie lauten

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext} \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

$$\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P} \quad (3.3)$$

mit den drei Feldern: elektrisches Feld  $\mathbf{E}$ , dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  und Polarisation  $\mathbf{P}$ . In einem Metall befinden sich unbewegliche positive Ladungen (die Atomkerne verziert mit ein paar Rumpfelektronen) und bewegliche negative Ladungen (die Leitungselektronen). Wir stellen uns ein endliches Volumen eines Metalls vor. Außerhalb dieses Metalls und separiert von diesem manipulieren wir externe Ladungen, so dass wir eine dielektrische Verschiebung aufbauen, die durch unser Metall verläuft. Das Metall kann die dielektrische Verschiebung nicht abändern, denn es enthält ja keine externen Ladungen, sondern nur interne bewegliche und unbewegliche Ladungen. Es sind die internen beweglichen Ladungen (die Leitungselektronen) des Metalls, die reagieren, die eine Polarisation

$$\mathbf{P}(\mathbf{D}) = +\mathbf{D} \quad (3.4)$$

aufbauen, so dass das elektrische Feld im Metall

$$\mathbf{E} = (\mathbf{D} - \mathbf{P})/\epsilon_0 = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

verschwindet. Gleichung 3.4 bzw. Gleichung 3.5 ist die konstituierende Gleichung eines idealen Metalls.

Wir betrachten einen Metallklumpen im Inneren eines Plattenkondensators (Abbildung 3.1) mit Platten im Abstand  $d$ . Den Plattenkondensator verbinden wir mit einer Spannungsquelle der Spannung  $U$ , so dass dieser ein dielektrisches Verschiebungsfeld  $\mathbf{D} = \epsilon_0 U/d \mathbf{e}_x$  aufbaut. Wir haben also externe Ladungen auf die Plattenkondensatorplatten aufgebracht (die externen Ladungen sitzen auf den metallischen Kondensatorplatten, also ebenfalls einem Metall). In unserem Metallbrocken verschwindet wegen Gleichung 3.5 das elektrische Feld, und wir können die Ladungsdichte im Metallbrocken zu

$$\rho_{gesamt} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \rho_{ext} + \rho_{int} \quad (3.6)$$

berechnen. Weil wir keine externen Ladungen auf dem Metallbrocken platziert haben, verschwindet die externe Ladungsdichte

$$\rho_{ext} = 0. \quad (3.7)$$

Dann muss wegen 3.6 aber auch die interne Ladungsdichte im Metallbrocken verschwinden.

$$\rho_{int} = 0 \quad (3.8)$$

Wo sitzen dann die internen Ladungen, die die Polarisation  $\mathbf{P}$  im Metallbrocken verursachen?

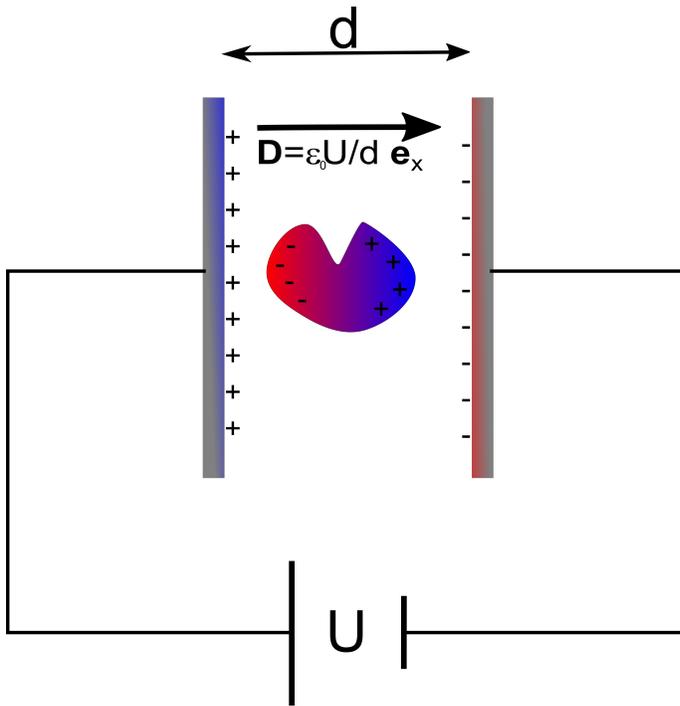


Abbildung 3.1: Ein Metallbrocken im Plattenkondensator

Wir denken uns dazu ein infinitesimales Volumen in Form einer Dose aus, wie in Abbildung 3.2 skizziert, die zur Hälfte in den Metallbrocken eingetaucht ist und dessen andere Hälfte im Vakuum (in der Luft) liegt.

In der Dose gibt es keine externen Ladungen, denn diese sind auf den Kondensatorplatten weit weg von der Metallbrockenoberfläche. Es gilt deshalb

$$Q_{int} = Q_{gesamt} = \epsilon_0 \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV - \int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dV \quad (3.9)$$

$$\stackrel{\text{Satz von Gau\ss}}{=} - \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} dA = - \int_{A_{Vakuum}} \mathbf{n}_{Vakuum} \cdot \mathbf{P} dA - \int_{A_{Metall}} \mathbf{n}_{Metall} \cdot \mathbf{P} dA. \quad (3.10)$$

Wegen  $\mathbf{n}_{Metall} = -\mathbf{n}_{Vakuum}$  finden wir eine interne Oberflächenladungsdichte

$$\sigma_{int, Metall} = \mathbf{n}_{Vakuum} \cdot \mathbf{P}_{Metall}. \quad (3.11)$$

Wir müssen diese Oberflächenladungen noch etwas genauer betrachten. Dazu berechnen wir die Kraft pro Fläche auf die Oberflächenladungen. Auf der Oberfläche sind diese Ladungen noch dem elektrischen Feld des Vakuums ausgesetzt und spüren deshalb eine Oberflächenkraftdichte

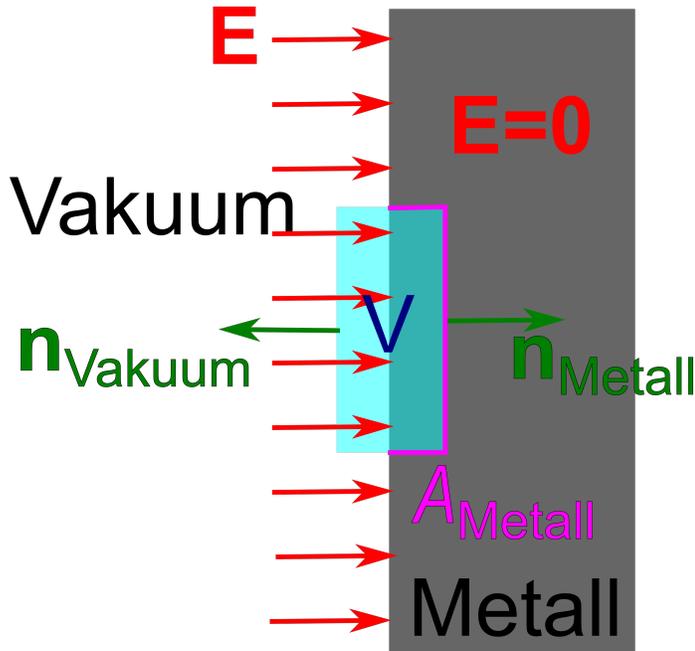


Abbildung 3.2: Die Oberflächenladungsdichte ist die Normalkomponente der Polarisation  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$

$$\frac{d\mathbf{F}}{dA} = \sigma_{int, Metall} \mathbf{E}_{Vakuum} = \mathbf{n}_{Vakuum} \cdot \mathbf{P}_{Metall} \mathbf{E}_{Vakuum} \quad (3.12)$$

$$= \mathbf{n}_{Vakuum} \cdot \mathbf{P}_{Metall} \mathbf{E}_{Vakuum} \cdot (\mathbb{1} - \mathbf{nn} + \mathbf{nn}) \quad (3.13)$$

$$= \underbrace{\mathbf{n}_{Vakuum} \cdot \mathbf{P}_{Metall} \mathbf{E}_{Vakuum} \cdot (\mathbb{1} - \mathbf{nn})}_{\text{Tangentialkraft}} + \underbrace{\mathbf{n}_{Vakuum} \cdot \mathbf{P}_{Metall} \mathbf{E}_{Vakuum} \cdot \mathbf{nn}}_{\text{Normalkraft}}, \quad (3.14)$$

wobei  $\mathbb{1}$  die Einheitsmatrix in drei Dimensionen bezeichnet. Die Oberflächenladungen auf der Metalloberfläche werden sich aufgrund der Tangentialkraft solange bewegen, bis keine Tangentialkraft mehr auf sie wirkt. Deshalb arrangieren sich die Oberflächenladungen so, dass das  $\mathbf{E}$ -Feld im Vakuum überall senkrecht auf der Metallgrenzfläche steht:

$$\mathbf{E} \cdot (\mathbb{1} - \mathbf{nn}) = \mathbf{0} \quad \text{an der Vakuum/Metall Grenzfläche} \quad (3.15)$$

Die Präsenz des Metallbrockens in einem elektrischen Feld führt im Vakuum zu den elektrostatischen Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.16)$$

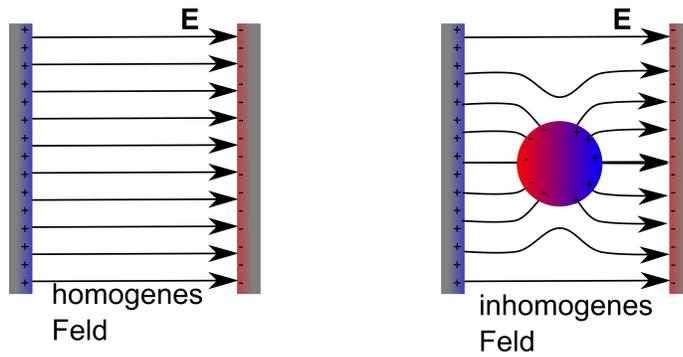
$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

mit der Randbedingung

$$\mathbf{E} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{nn}) = \mathbf{0} \quad \text{an der Vakuum/Metall-Grenzfläche} \quad (3.18)$$

im Metall gilt dann

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$



**Abbildung 3.3:** Eine Metallkugel im elektrischen Feld verändert das elektrische Feld im Vakuum.

In Abbildung 3.3 zeigen wir das elektrische Feld eines Plattenkondensators vor und nach dem Einbringen einer Metallkugel. Man sieht, wie die Oberflächenladungen des Metalls das Feld im Vakuum abändern.

### 3.1.1 Bemerkung 1

die statischen Maxwellgleichungen in Materie

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext} \quad (3.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

$$\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P} \quad (3.22)$$

sind im statischen Fall immer gültig. Die konstituierende Gleichung

$$\mathbf{P}(\mathbf{D}) = +\mathbf{D} \quad (3.23)$$

gilt nur im idealen Metall. Im Vakuum gilt eine andere konstituierende Gleichung, nämlich

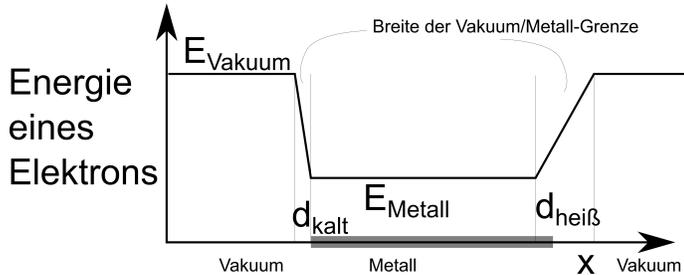
$$\mathbf{P}(\mathbf{D}) = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

Konstituierende Gleichungen lassen sich ableiten aus den Maxwellgleichungen mit den Feldern  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  unter Hinzunahme quantenmechanischer Bewegungsgleichungen für die unbeweglichen und beweglichen Ladungen und unter gewissen Annahmen über das Material. Mit Ableitungen dieser Art werden Sie in der Vorlesung über Festkörperphysik konfrontiert werden, jedoch nicht in dieser Vorlesung.

### 3.1.2 Bemerkung 2

Die Ladungsdichte  $\rho_{ext}$  ist normalerweise räumlich separiert von der Ladungsdichte  $\rho_{int}$ , aber das elektrische Feld  $\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}$  ist an jedem Ort eine Überlagerung beider Ladungsverteilungen. Ein Metall ändert das elektrische Feld auch außerhalb des Metalls ab, nicht jedoch  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext}$ . Die Abänderung des elektrischen Feldes im Vakuum wird mathematisch verursacht durch die Randbedingung  $\mathbf{E} \cdot (\mathbb{1} - \mathbf{nn}) = \mathbf{0}$  auf dem Rand des Vakuums zum Metall. Lokal ist die Aufteilung des elektrischen Feldes  $\mathbf{E} = (\mathbf{D} - \mathbf{P})/\epsilon_0$  in ein dielektrisches Feld und eine Polarisation durch die konstituierende Gleichung ( $\mathbf{P} = \mathbf{D}$  im Metall) klar festgelegt. Wechselt man das Material, so ändert sich die Aufteilung. Eine Polarisation im Metall verursacht auch eine dielektrische Verschiebung im Vakuum, welches wieder auf die Polarisation und dielektrische Verschiebung im Metall zurückwirkt. Durch die Präsenz zweier Materialien wird der Zusammenhang der Felder nichtlokal verkoppelt. Beachten Sie, dass eine Probeladung nicht messen kann, ob sie ein externes oder internes Feld spürt.

### 3.1.3 Bemerkung 3



**Abbildung 3.4:** Elektronen haben im Metall eine niedrigere Energie als im Vakuum. Die Breite der Grenzschicht hängt von der Temperatur ab.

Die Ladungen an der Oberfläche spüren wegen  $\mathbf{E}_{Vakuum} \cdot \mathbf{n} \neq 0$  eine elektrische Kraft, die versucht, die Ladungen aus dem Metall ins Vakuum herauszuziehen. Da dies im Experiment bei nicht zu hohen elektrischen Feldern nicht passiert, muss es eine Gegenkraft des Metalls auf die beweglichen Ladungen geben, die ein Verlassen der Oberfläche Richtung Vakuum verhindern. Woher diese Kraft kommt, bleibt im Rahmen der phänomenologischen Beschreibung unklar. Ursache ist die elektrostatische Anziehungskraft zwischen Elektronen und den positiven Atomrümpfen des Metalls, die allerdings quantenmechanisch beschrieben werden muss.

In Abbildung 3.4 haben wir ein vereinfachtes schematisches Energieschema als Funktion des Ortes aufgetragen. Die Energie der Elektronen ist im Metall niedriger als im Vakuum  $E_{Metall} < E_{Vakuum}$ . Die Kraft, die nötig ist, um das Elektron aus dem Metall zu ziehen, ist  $\mathbf{F}_c = e\mathbf{E}_c = (E_{Vakuum} - E_{Metall})/de_x$ , wobei  $d$  die Dicke der Grenzschicht ist und  $\mathbf{E}_c$  die kritische Feldstärke, um die Elektronen aus dem Metall auszulösen.

Die Dicke der Grenzschicht zwischen Metall und Vakuum ist eine thermodynamische Größe, wie die Dicke unserer Atmosphäre auch folgt die Elektronenladungsdichte einer Exponentialfunktion  $\rho_{int} \propto \exp(-x/d)$  mit  $d \propto k_B T$  (Abbildung 3.5). Wenn man das Metall zum Glühen erhitzt, wird es einfacher, die Elektronen aus dem Metall herauszulösen.

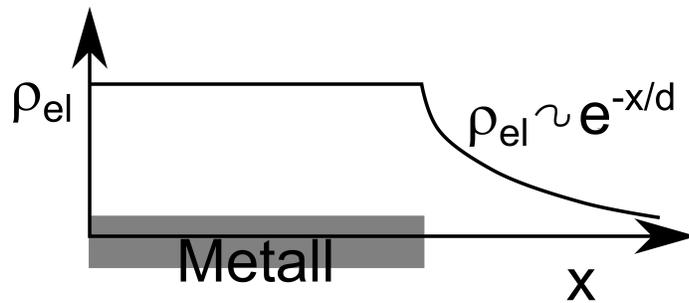


Abbildung 3.5: Die Elektronendichte nimmt vom Metall weg exponentiell ab.

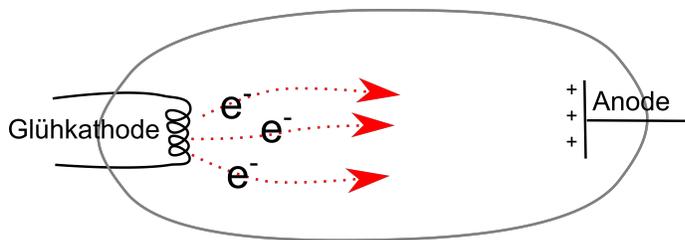
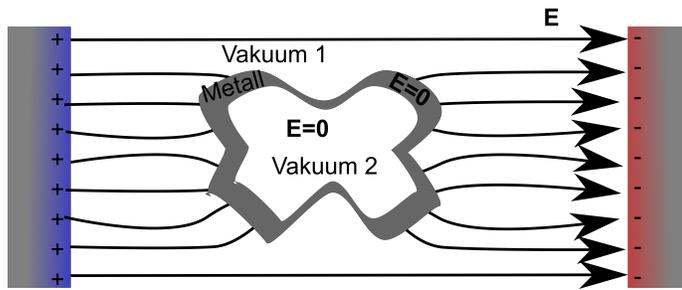


Abbildung 3.6: Elektronen werden in einer Röhre aus der Glühkathode zur Anode gesaugt.

In Abbildung 3.6 haben wir einen schematischen Aufbau einer einfachen Röhre dargestellt, bei der ein Metall in einer Glühwendel eine Elektronenatmosphäre schafft, die mit einer Anode leicht abgesaugt werden kann. Im E-learning sehen sie einen Film einer Glühkathode.

### 3.1.4 Bemerkung 4, Faradaykäfig

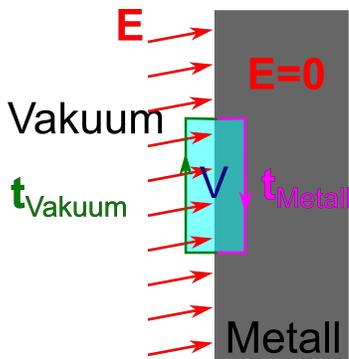
Das Metall schirmt das elektrische Feld nicht nur im Inneren des Metalls ab, sondern auch in einem Vakuum, das vollständig von einem Metall umgeben ist. Dieser Faraday-Effekt (Abbildung 3.7) wird ausgenutzt, um elektronische empfindliche Komponenten gegen äußere Felder zu schützen. Im E-learning sehen Sie zwei Filme zum Faraday Effekt. Im ersten Film wird ein Elektrometer benutzt um die Hochspannung eines Faradaykäfigs zu messen. Das Elektrometer misst ein elektrische Feld nur dann wenn es sich ausserhalb des Faradaykäfigs befindet, nicht wenn dieses in den Faradaykäfig eingeführt wird. Im zweiten Film wird ein Faraday-Becher mit einem Kugelkondensator sukzessive aufgeladen. Das Aufladen funktioniert bis zu einer Maximalspannung, wenn man den Becher von Außen füllt, indem man den Kugelkondensator mehrmals seine Ladung teilweise auf den Becher



**Abbildung 3.7:** Der Faraday Effekt: Zwei topologisch separierte Vakua, das erste ist einem elektrischem Feld ausgesetzt, das zweite ist feldfrei.

übertragen lässt. Viel besser funktioniert das Aufladen, wenn man den Becher Innen befüllt (warum wohl?).

### 3.1.5 Bemerkung 5



**Abbildung 3.8:** Die Maxwellgleichung  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  verbietet eine Tangentialkomponente des Feldes an einer Metall/Vakuum-Grenzfläche.

Die Randbedingung  $\mathbf{E} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{nn}) = \mathbf{0}$  an der Vakuum/Metall-Grenzfläche folgt auch direkt aus der Maxwellgleichung  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ . Hierzu umlaufen wir eine infinitesimale Schleife die zur Hälfte durchs Metall parallel zur Grenzfläche verläuft und antiparallel im Vakuum zurückführt und die die Fläche  $A$  einschließt (Abbildung 3.8).

Wir finden

$$0 = \int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} \stackrel{\text{Satz von Stokes}}{=} \oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial A_{\text{Vakuum}}} \mathbf{E}_{\text{Vakuum}} \cdot \mathbf{t}_{\text{Vakuum}} ds, \quad (3.25)$$

woraus wir folgern, dass das Skalarprodukt des Vakuum-elektrischen-Feldes mit jedem Tangentenvektor verschwindet

$$\mathbf{E}_{\text{Vakuum}} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (3.26)$$

## 3.2 Elektrostatisches Potenzial

Für das elektrische Feld einer Punktladung fanden wir den Ausdruck

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (3.27)$$

$$= -\nabla \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.28)$$

$$= -\nabla\phi \quad (3.29)$$

mit

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (3.30)$$

dem elektrostatischen Potenzial einer Punktladung. Mit dem Superpositionsprinzip finden wir das elektrostatische Potenzial einer beliebigen Ladungsdichteverteilung

$$\phi(\mathbf{r}_1) = \int d^3\mathbf{r}_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (3.31)$$

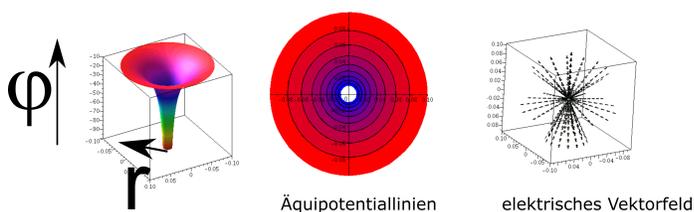
Aufgrund der Maxwellgleichung  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  gilt  $0 = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ , und das elektrische Feld hat immer ein elektrostatisches Potenzial, für das gilt:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad (3.32)$$

und es gilt

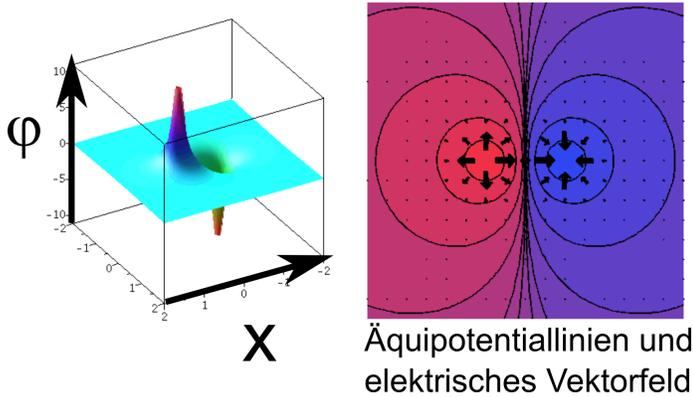
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \nabla\phi = \mathbf{0}. \quad (3.33)$$

Das elektrische Potenzial  $\phi$  misst die potentielle Energie pro Probeladung, die eine solche Probeladung gewinnt, wenn man die Probeladung aus dem Unendlichen an die Stelle  $\mathbf{r}$  befördert. Das elektrische Feld  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  zeigt in die Richtung stärkster Abnahme des elektrostatischen Potentials und damit senkrecht zu den Äquipotentialflächen. In Abbildung 3.9 zeigen wir die elektrischen Feldlinien und Äquipotentialflächen einer Punktladung.



**Abbildung 3.9:** Elektrostatisches Potenzial, Äquipotentialflächen und  $\mathbf{E}$ -Feld einer Punktladung

Das elektrostatische Potenzial vereinfacht die elektrostatischen Gleichungen enorm, da es die homogene Maxwellgleichung automatisch löst, also die Anzahl der Gleichungen reduziert, und weil es im Gegensatz zum Vektor des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  eine skalare Größe ist (später, wenn wir dynamische Phänomene studieren, werden wir sehen, dass  $\phi$  Teil eines Vierervektors ist).



**Abbildung 3.10:** Elektrostatistisches Potenzial, Äquipotentialflächen und  $\mathbf{E}$ -Feld zweier entgegengesetzter Punktladungen

In Abbildung 3.10 zeigen wir das elektrische Feld und die Äquipotentialflächen zweier entgegengesetzter Punktladungen, für die das elektrostatische Potenzial durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{d}{2}\mathbf{e}_x|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{d}{2}\mathbf{e}_x|} \right) \quad (3.34)$$

gegeben ist, wobei  $\mathbf{d} = d\mathbf{e}_x$  den Vektor von der einen zur anderen Ladung bezeichnet.

Wenn wir die Randbedingung  $(\mathbb{1} - \mathbf{nn}) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}$  mit dem elektrostatischen Potenzial ausdrücken, finden wir, dass diese Randbedingung identisch ist mit der Aussage, dass die Metall/Vakuum-Grenzfläche Äquipotentialfläche  $\phi(\mathbf{r}_{Grenz}) = konst$  sein muss.

Die inhomogene Maxwellgleichung  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  geht mit Hilfe des elektrostatischen Potentials in die skalare Poissongleichung

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (3.35)$$

über.





## Kapitel 4

# Beispiele des elektrostatischen Potenzials

In dieser Vorlesung stellen wir einige symmetrische Lösungen für das elektrostatische Potenzial und das elektrische Feld vor.

## 4.1 Das elektrostatische Potenzial eines Dipols

Wir greifen nochmals das elektrostatische Potenzial zweier entgegengesetzter Ladungen aus Vorlesung 3 auf. Dort fanden wir den Ausdruck:

$$\phi_{\text{ausgedehnter Dipol}}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{d}{2}\mathbf{e}_x|} + \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{d}{2}\mathbf{e}_x|} \right) \quad (4.1)$$

Wir formulieren diesen Ausdruck um, in dem wir bemerken, dass dieser sich aus den elektrostatischen Potenzialen zweier Punktladungen zusammensetzt, die jeweils um  $\pm \mathbf{d}/2$  aus dem Ursprung verschoben sind

$$\phi_{\text{ausgedehnter Dipol}}(\mathbf{r}) = \phi_{+q, \text{Punktladung}}(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2) + \phi_{-q, \text{Punktladung}}(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2) \quad (4.2)$$

$$= \phi_{+q, \text{Punktladung}}(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2) - \phi_{+q, \text{Punktladung}}(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2). \quad (4.3)$$

Die Taylorentwicklung einer Funktion um den Punkt  $\mathbf{x}$  können wir schreiben als:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial \mathbf{x}^n} : \underbrace{(\mathbf{a}\mathbf{a}\dots\mathbf{a})}_{n\text{-mal}} \quad (4.4)$$

$$= e^{\mathbf{a} \cdot \nabla} f(\mathbf{x}) \quad (4.5)$$

Wir wenden dies auf unser elektrostatisches Potenzial eines ausgedehnten Dipols an und lassen dann den Abstand der beiden Ladungen verschwinden, indem wir gleichzeitig die Ladungen so anwachsen lassen, dass das Produkt aus Ladung und Abstand konstant bleibt:

$$\phi_{\text{ausgedehnter Dipol}}(\mathbf{r}) = (e^{\frac{\mathbf{d}}{2} \cdot \nabla} - e^{-\frac{\mathbf{d}}{2} \cdot \nabla}) \phi_{+q, \text{Punktladung}}(\mathbf{r}) \quad (4.6)$$

$$\stackrel{\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}}{=} \mathbf{d} \cdot \nabla \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|} = q\mathbf{d} \cdot \frac{\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (4.7)$$

Das Produkt aus der Ladung und Abstand

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad (4.8)$$

bezeichnen wir als das elektrische Dipolmoment  $\mathbf{p}$ .

Das elektrische Feld eines Dipols ist durch

$$\mathbf{E}_{\text{Punkt Dipol}} = -\nabla \phi_{\text{Punkt Dipol}} = -\mathbf{d} \cdot \nabla \nabla \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.9)$$

$$\stackrel{\mathbf{p} = q\mathbf{d}}{=} \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2 \mathbb{1}}{r^5} \quad (4.10)$$

gegeben. In Abbildung 4.1 zeichnen wir die Äquipotenzialflächen und das elektrische Feld eines Punktdipols.

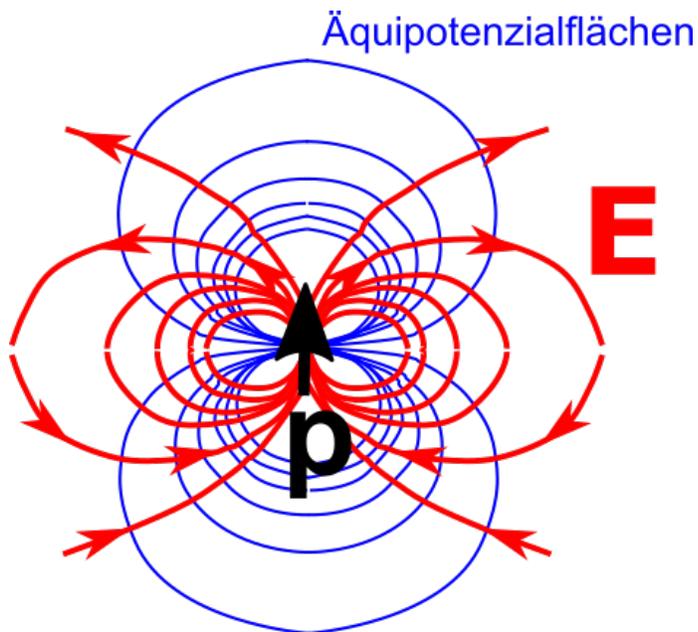


Abbildung 4.1: Äquipotenzialflächen und das elektrische Feld eines Punktdipols

## 4.2 Weitere symmetrische Lösungen für das elektrische Feld

### 4.2.1 Geladener Draht

Wenn wir eine symmetrische Konfiguration der Ladungen haben, lassen sich die entsprechenden Felder mit dem Satz von Gauß einfach berechnen.

Wir betrachten einen unendlich dünnen zylindersymmetrischen geladenen Draht der Linienladungsdichte  $\lambda$  bzw. der Ladungsdichte

$$\rho_{el} = \lambda \delta(x) \delta(y) = \frac{\lambda}{\pi} \delta(\rho^2) \quad (4.11)$$



Abbildung 4.2: Unendlich dünner Draht mit Linienladungsdichte  $\lambda$

entlang der  $z$ -Achse (Abbildung 4.2). Wir benutzen Zylinderkoordinaten  $\rho, \phi, z$  mit Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi$  und  $\mathbf{e}_z$ . Aus Symmetriegründen kann es nur radial nach außen gerichtete Vektorkomponenten

des elektrischen Feldes geben:

$$\mathbf{E} = E_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho, \quad (4.12)$$

bei dem der elektrische Feldvektor weder von der Koordinate  $\phi$ , noch von der Koordinate  $z$  abhängen kann.

Wir wenden den Satz von Gauß an, um die Ladung in einer zylindrischen Dose mit Radius  $\rho$  und Länge  $L$  zu finden. Wir integrieren die inhomogene Maxwellgleichung über das Volumen  $V$  der Dose:

$$\int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{E} = \int_V d^3\mathbf{r} \rho_{el}/\epsilon_0 \quad (4.13)$$

und finden unter Benutzung von 4.11 und 4.12 sowie des Satzes von Gauß:

$$\int_{\partial V} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = 2\pi L \int_0^\rho \rho d\rho \frac{\lambda}{\pi} \delta(\rho^2) = L\lambda/\epsilon_0, \quad (4.14)$$

wobei wir nur über die halbe bei  $r = 0$  zentrierte Deltafunktion integrieren. Das Integral über den Rand der Dose liefert auf den Deckeln keinen Beitrag, da  $d\mathbf{A}$  dort senkrecht zu  $\mathbf{E}$  steht. Es verbleibt der Beitrag über den Mantel:

$$2\pi L \rho E_\rho(\rho) = L\lambda/\epsilon_0, \quad (4.15)$$

und wir finden das elektrische Feld eines Drahtes:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\rho\epsilon_0}\mathbf{e}_\rho. \quad (4.16)$$

#### 4.2.2 Geladene Membran

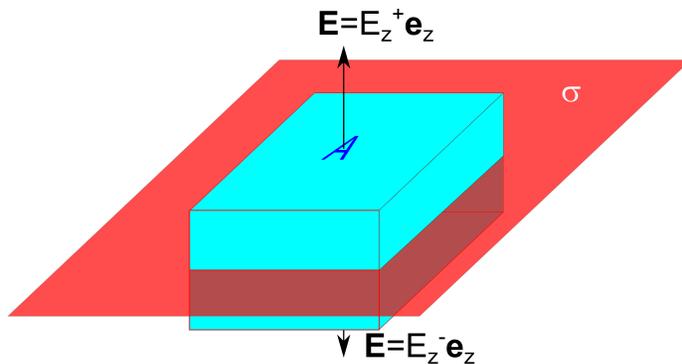


Abbildung 4.3: Geladene Membran  $\lambda$

Wir betrachten eine homogen geladene Membran der Ladungsdichte

$$\rho_{el} = \sigma\delta(z) \quad (4.17)$$

und Oberflächenladungsdichte  $\sigma$  (Abbildung 4.3). Aus Symmetriegründen kann das elektrische Feld nur senkrecht zur Membran gerichtet sein, und muß auf beiden Seiten der Membran in umgekehrte

Richtung zeigen. Wir verwenden eine symmetrisch die Membran einschließende Box der Deckfläche  $A$  die von  $-Z < z < Z$  reicht. Mit  $E_z^+(z)$  und  $E_z^-(z)$  bezeichnen wir die  $z$ -Komponenten des Feldes auf der einen bzw. anderen Seite der Membran. Wenn wir die inhomogene Maxwellgleichung

$$\int_V d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{E} = \int_V d^3\mathbf{r} \rho_{el} / \epsilon_0 \quad (4.18)$$

benutzen, für die linke Seite wieder den Satz von Gauß anwenden, finden wir

$$E_z^+(z)A - E_z^-(z)A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}, \quad (4.19)$$

und mit Benutzung der Symmetrie  $E_z^+(z) = E_z^-(z)$  finden wir das elektrische Feld einer Membran

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(z) \mathbf{e}_z. \quad (4.20)$$

### 4.2.3 Geladenen Dipolschicht

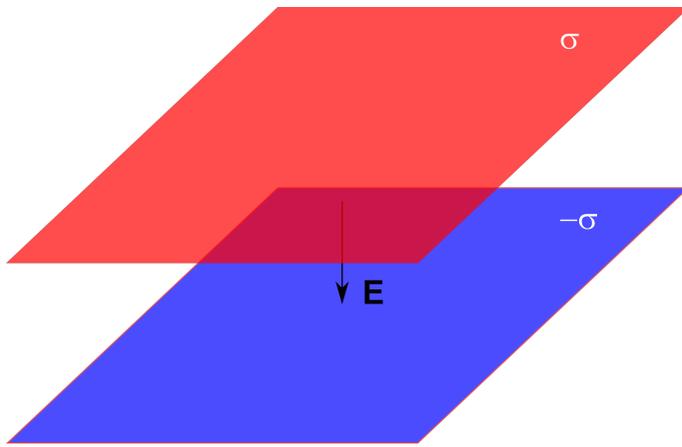


Abbildung 4.4: Geladene Dipolschicht

Aus zwei entgegengesetzt geladenen Membranen im Abstand  $d$  erhalten wir das elektrische Feld einer Dipoldoppelschicht (Abbildung 4.4):

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\text{sign}(z - d/2) - \text{sign}(z + d/2)) \mathbf{e}_z, \quad (4.21)$$

bzw.

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_z & \text{für } -d/2 < z < d/2 \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.22)$$

#### 4.2.4 Feld einer homogen geladenen Kugel

Wir betrachten eine homogen geladene Kugel mit Radius  $R$  der Ladungsdichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho\Theta(R^2 - r^2), \quad (4.23)$$

wobei wir mit  $\Theta(x)$  die Heavisidefunktion bezeichnen. Berücksichtigung der Symmetrie und des Satzes von Gauß' (das elektrische Feld hat ausschließlich eine winkelunabhängige Radialkomponente) führt analog zu den vorig betrachteten Fällen auf:

$$4\pi r^2 E_r(r) = \int_{r' < r} 4\pi r'^2 dr' \rho(r') / \epsilon_0 \quad (4.24)$$

$$= \frac{4\pi\rho}{3\epsilon_0} (\min(r, R))^3 \quad (4.25)$$

$$= \begin{cases} \frac{4\pi\rho r^3}{3\epsilon_0} & \text{für } r < R \\ \frac{4\pi\rho R^3}{3\epsilon_0} & \text{für } r > R \end{cases} \quad (4.26)$$

$$= \begin{cases} \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} & \text{für } r < R \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{für } r > R \end{cases}, \quad (4.27)$$

und wir finden

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} & \text{für } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & \text{für } r > R \end{cases}. \quad (4.28)$$

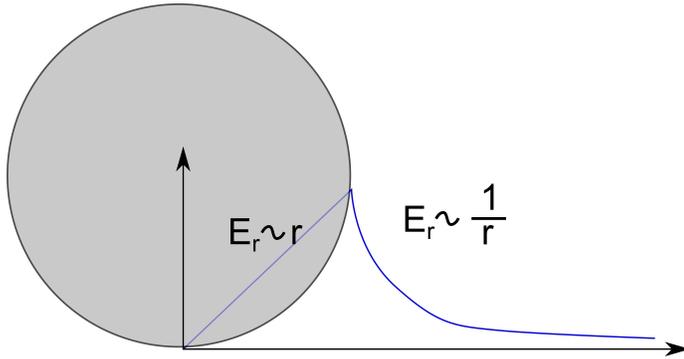
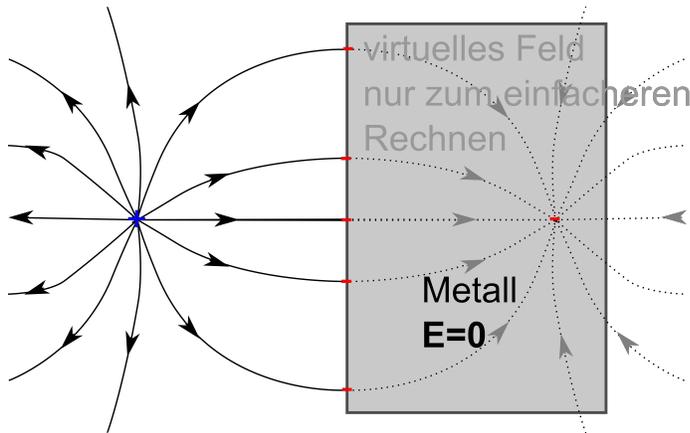


Abbildung 4.5: Elektrisches Radialfeld einer homogen geladenen Kugel  $\lambda$

Außerhalb der Kugel ist das elektrische Feld (Gleichung 4.28) identisch einem Coulombfeld einer Punktladung  $Q$ , innerhalb der Kugel wächst das Feld linear an. Abbildung 4.5 zeigt die Radialkomponente des elektrischen Feldes einer homogenen Kugel als Funktion des Abstands  $r$  vom Zentrum der Kugel.



**Abbildung 4.6:** Elektrisches Feld einer Punktladung vor einer Metalloberfläche und virtuelle Spiegelladung

#### 4.2.5 Punktladung vor einer Metalloberfläche

Platzieren wir eine Punktladung im Abstand  $d$  vor einer ebenen Metalloberfläche (Abbildung 4.6), müssen wir das  $\mathbf{E}$ -Feld so verbiegen, dass es senkrecht auf die Metalloberfläche steht. Eine solche Lösung haben wir aber bereits besprochen, als wir zwei entgegengesetzte Ladungen betrachtet haben. Die Mittelebene zwischen beiden Ladungen ist eine Symmetrieebene, weshalb das elektrische Feld senkrecht auf dieser stehen muß. Das elektrische Feld schreibt sich als

$$\mathbf{E} = -\nabla\left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - d\mathbf{e}_z|} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} + d\mathbf{e}_z|}\right) \quad (4.29)$$

In der Symmetrieebene also auf der Vakuumseite der Metalloberfläche lautet das Feld

$$\mathbf{E}(z \searrow 0) = -\frac{2dQ}{4\pi\epsilon_0\sqrt{d^2 + x^2 + y^2}^3}\mathbf{e}_z, \quad (4.30)$$

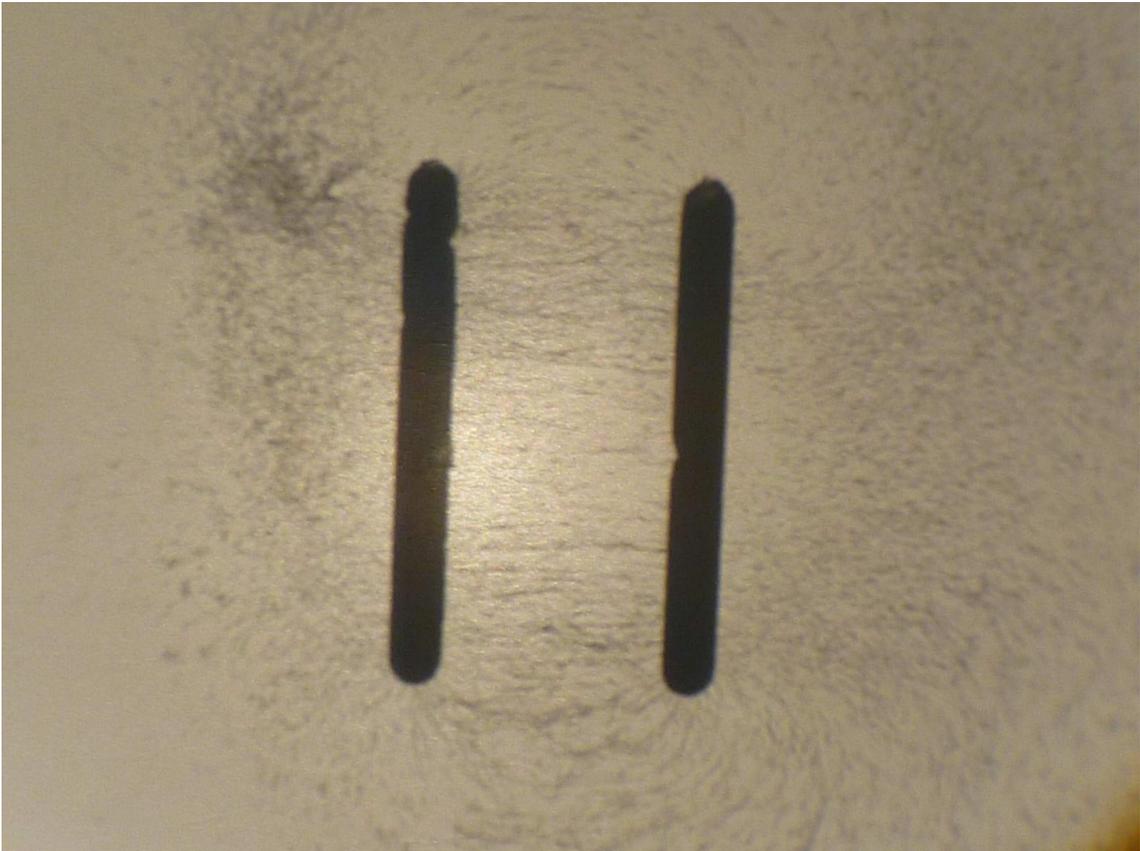
so dass die Oberflächenladungsdichte

$$\sigma = \frac{-2dQ}{4\pi\sqrt{d^2 + x^2 + y^2}^3} \quad (4.31)$$

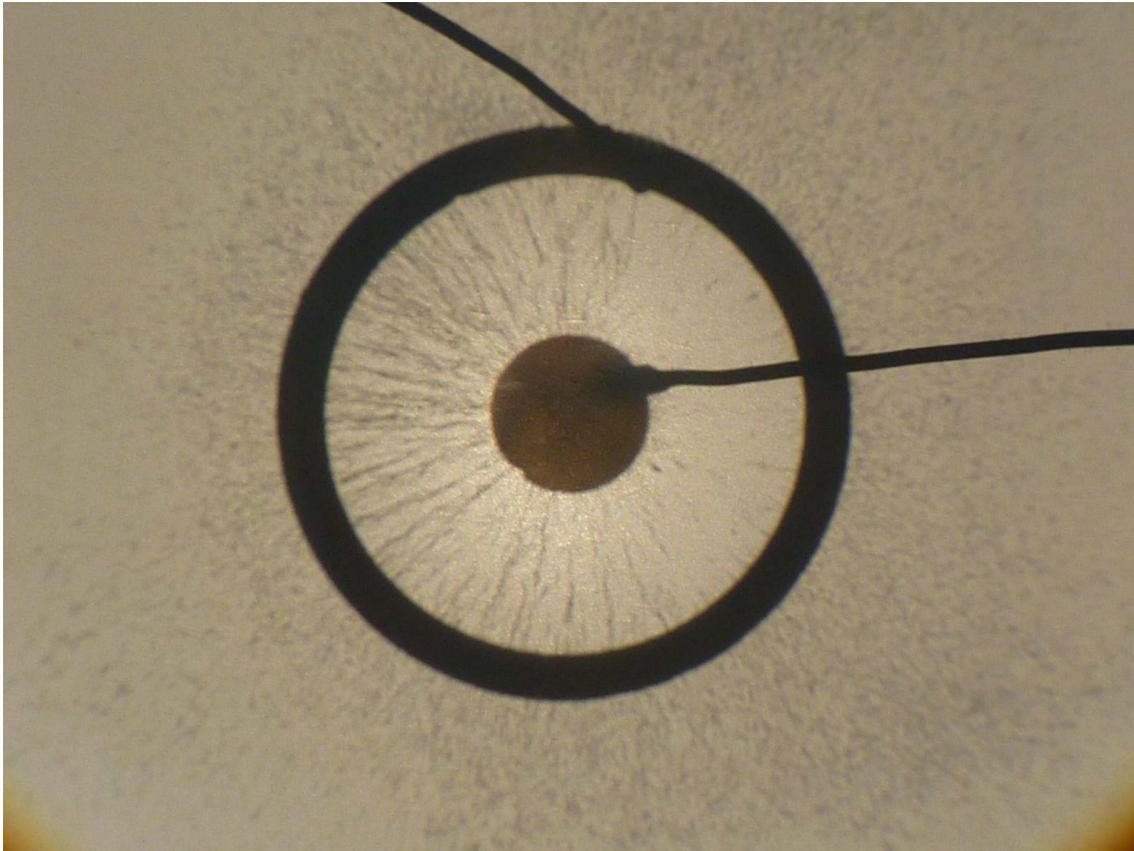
beträgt.

Im Vakuum ist die das Feld einer Oberflächenladungsdichte 4.31 auf dem Metall nicht zu unterscheiden von einem elektrischen Feld einer negativen Spiegelladung, die an der virtuellen Stelle  $z = -d$  platziert ist.

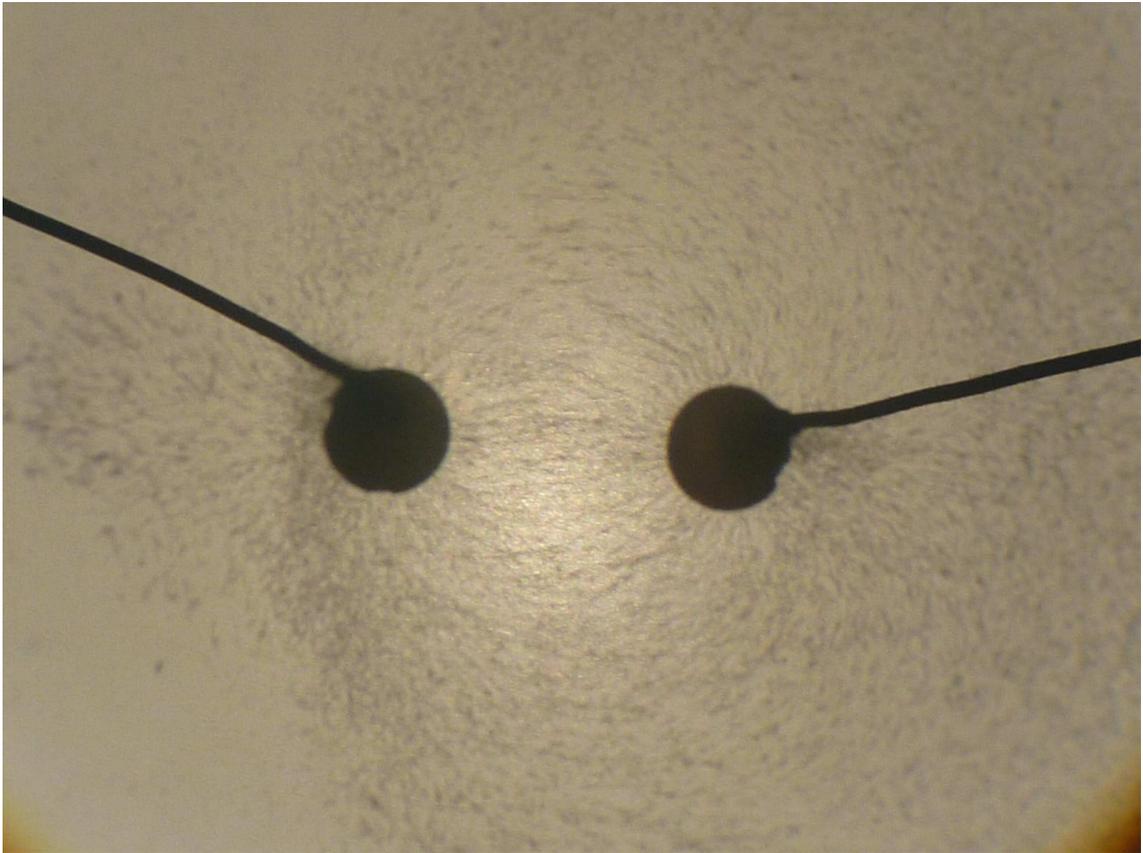
Wir können die elektrischen Feldlinien experimentell sichtbar machen (Thomas Dabisch kann das), wenn wir Kunststofffasern auf Öl schwimmen lassen. Legen wir dann eine Spannung an zwei ins Öl getauchte Metalle an, sehen wir die zweidimensionalen Analoga der besprochenen Felder. Das elektrostatische Potenzial eines Punktes in zwei Dimensionen entspricht einem unendlich langen dünnen Draht in drei Dimensionen. Ein Punkt-Potenzial hat eine logarithmische Abstandsabhängigkeit keine  $1/r$ -Abhängigkeit. In Abbildung 4.7-4.11 zeigen wir mehrere Beispiele solcher Felder.



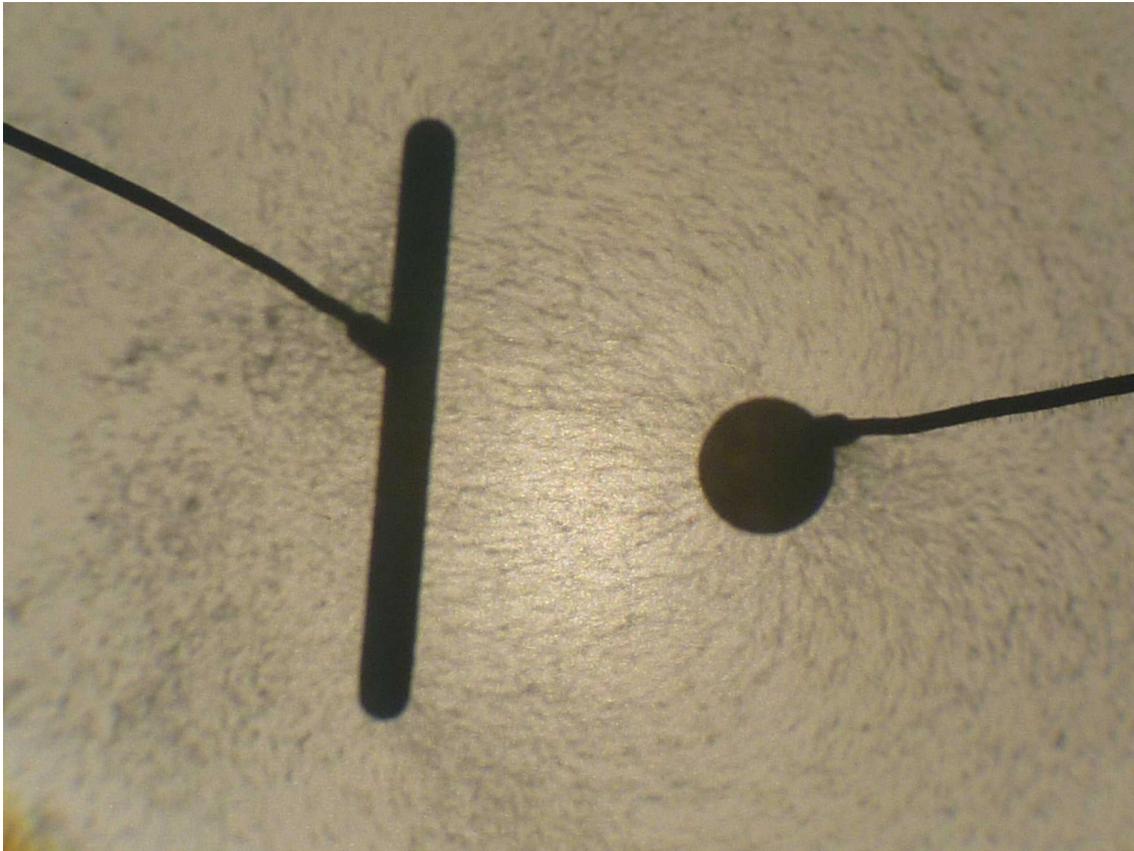
**Abbildung 4.7:** Elektrisches Feld eines zweidimensionalen Plattenkondensators aufgenommen von Thomas Dabisch



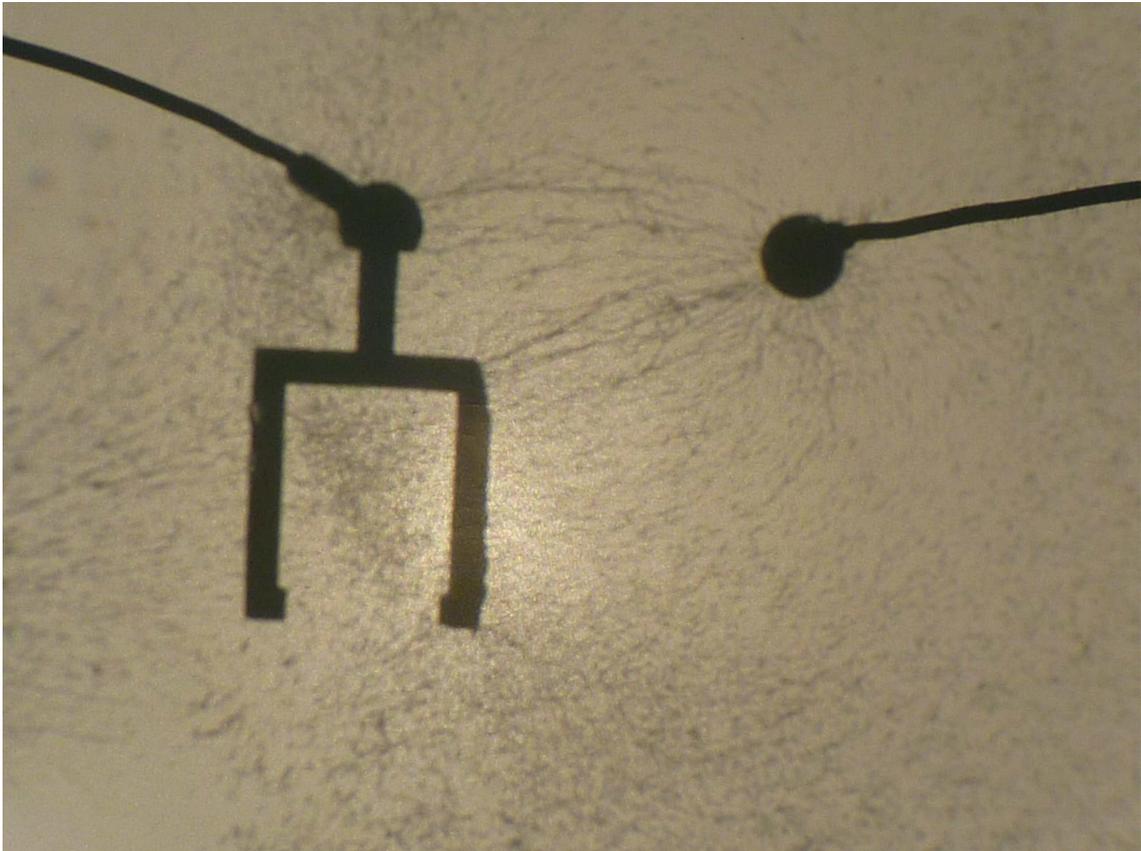
**Abbildung 4.8:** Elektrisches Feld eines zweidimensionalen Kugelkondensators aufgenommen von Thomas Dabisch



**Abbildung 4.9:** Elektrisches Feld zweier entgegengesetzter zweidimensionaler *Punkt*-Ladungen aufgenommen von Thomas Dabisch



**Abbildung 4.10:** Elektrisches Feld einer zweidimensionalen *Punkt*-Ladung vor einer Metallplatte aufgenommen von Thomas Dabisch



**Abbildung 4.11:** Elektrisches Feld einer zweidimensionalen *Punkt*-Ladung vor einem Faradaybecher aufgenommen von Thomas Dabisch. Im Becher ist kein Feld zu sehen

## 4.3 Übungen

### 4.3.1 Foucaultsches Pendel im Magnetfeld

Am Nordpol wird ein Foucaultsches Pendel aus einem isolierenden Pendelfaden der Länge  $l$  und der metallischen Pendelmasse  $m = 1 \text{ kg}$  mit Radius  $R$  in einem evakuierten Raum aufgehängt und in Schwingung versetzt.

- Wie lange dauert eine volle Umdrehung der Pendelebene am Nordpol? Welche Kraft ist für die Drehung der Pendelebene verantwortlich und in welche Richtung dreht sich die Pendelebene?
- Die magnetische Flussdichte am Nordpol kann als senkrecht zur Erdoberfläche angenähert werden und beträgt  $B_r \approx -60 \mu\text{T}$ . Auf welche Ladung  $Q$  muss die Pendelmasse aufgeladen werden, um die Pendelebenenrotation zu kompensieren?
- Welches Vorzeichen hat die Ladung bei einem Experiment auf dem Nordpol?
- Welches Vorzeichen hat die Ladung bei einem analogen Experiment auf dem Südpol?
- Auf welches Potenzial  $\varphi$  muss die Kugeloberfläche dazu gebracht werden?

### 4.3.2 Van-de-Graaff-Generator

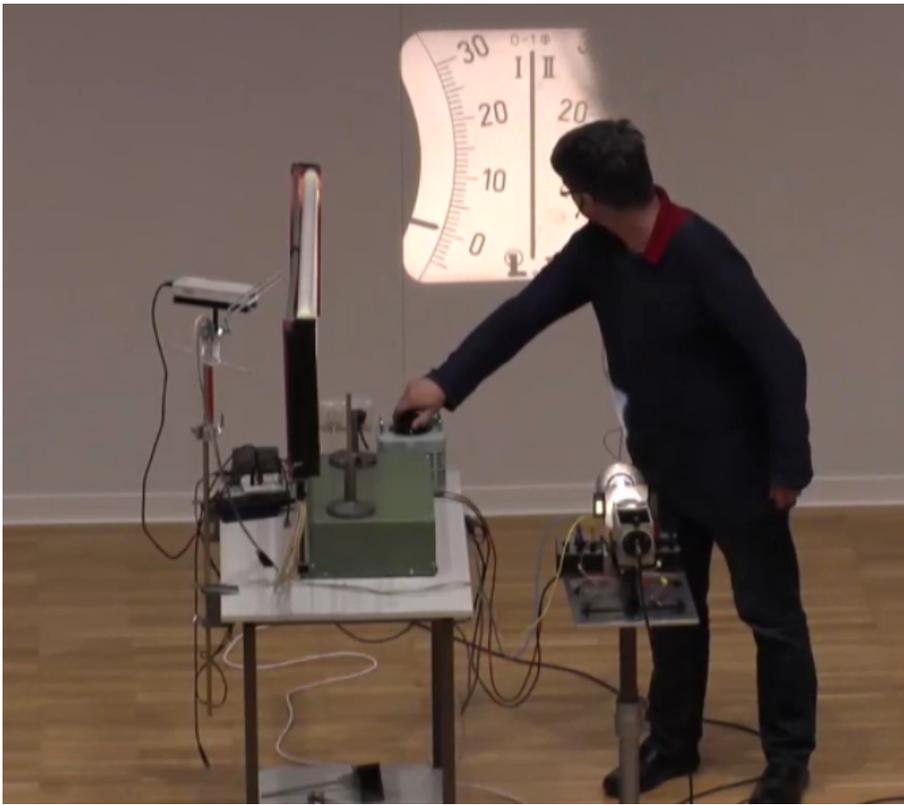
Bauen Sie einen Van-de-Graaff-Generator aus einer Getränkedose und Gummibändern! Hilfreich sind z.B. Lego-Technik, oder Fischer-Technik für den Aufbau. Als Antrieb geht ein Kurbelgetriebe, oder ein Legomotor. Auch ein Akkuschauber kann schnell drehen. Das Abspreizen der Papierstreifen (home-Elektrometer) dient als Funktionsbeweis. Nehmen Sie ein Video mit dem Generator und sich selbst auf. Die drei überzeugendsten Videoexperimente kommen auf die Lernseite



Abbildung 4.12: Van-de-Graaff-Generator von Anna-Lena

### 4.3.3 Programmierung: Stabladungen

Wenn Punktladungen durch unendlich lange dünne zueinander parallele Stabladungen ersetzt werden wird die Poisson Gleichung zweidimensional und die Funktion  $\Re \ln(f(z))$  löst die Poissongleichung für positive Stangenladungen, die an den Nullstellen der Funktion  $f(z)$  platziert sind und negative Stangenladungen, die an den Polen von  $f(z)$  platziert sind, wobei  $f(z)$  eine komplexe Funktion der komplexen Zahl  $z$  ist. Plotten Sie die Äquipotenziallinien der Funktion  $\Re \ln(\text{cn}(z, 1/3))$ , wobei  $\text{cn}(z, K)$  den Cosinus amplitudinis bezeichnet. Welches Material kann man damit beschreiben?



## Kapitel 5

# Maxwell Gleichungen mit klassischer Dynamik

In dieser Vorlesung lösen wir die Maxwellgleichungen und klassischen Bewegungsgleichungen der Ladungen für ein Plasma. Das Plasma postulieren wir als eine Mischung eines inkompressiblen positiven Hintergrunds mit einem kompressiblen negativen beweglichen Gas. Als Hauptresultat finden wir die charakteristische Plasmafrequenz mit welcher das Plasma um seine neutrale Gleichgewichtslage schwingt. Fällt eine elektromagnetische, mit von der Plasmafrequenz abweichender Frequenz, aus einem Vakuum ein, so wird die elektromagnetische Welle reflektiert, wenn die Frequenz der Welle kleiner ist als die Plasmafrequenz und transmittiert, wenn die Frequenz der Welle größer ist als die Plasmafrequenz.

## 5.1 Klassische versus quantenmechanische Effekte

Ein System von Ladungen, welches sich klassisch bewegt, kann durch die Maxwellgleichungen und klassischen Bewegungsgleichungen beschrieben werden. Wir haben bereits gelernt, dass der Zusammenhalt der Materie mit klassischen Bewegungsgleichungen nicht erklärt werden kann. Teilchen verhalten sich nur klassisch, wenn sie nicht zu eng gepackt sind, so dass die Heisenbergsche Unschärferelation sie nicht zu quantenmechanischen Nervositätsbewegungen animiert. Dann bewegen sich die Ladungen quasi frei durchs Vakuum. In Materie hingegen, sind die richtigen Gleichungen die Maxwellgleichungen zusammen mit quantenmechanischen Bewegungsgleichungen. Diese werden in der Quantenmechanik und Festkörperphysik, hier aber nur sehr vereinfacht, besprochen werden.

### 5.1.1 Maxwellgleichungen und klassische Bewegungsgleichungen

Ein System, welches sich durch die Maxwellgleichungen zusammen mit den klassischen Bewegungsgleichungen beschreiben läßt, ist ein Plasma. Ein Plasma ist eine neutrale Mischung positiver und negativer frei beweglicher Ladungen, die verdünnt ist, so dass die Heisenbergsche Unschärferelation nicht wichtig ist.

#### Beispiele von Plasmen

- a) **Frei bewegliche Elektronen in einem Metall vor dem Hintergrund der positiven Atomrümpfe** bilden ein Plasma. Zur Präzisierung ist zu bemerken, dass nicht alle Elektronen sondern nur ein Bruchteil der Elektronen frei beweglich sind. Frei beweglich sind diejenigen Elektronen, die eine besonders hohe Energie, -die Fermienergie  $E \approx \epsilon_F \pm k_B T$  -, haben. Der Großteil der restlichen Elektronen ist nicht frei und wird dem positiven Hintergrund zugerechnet.
- b) Die **Ionosphäre** ist ein Plasma. Von der Sonne und aus dem All treffen hochenergetische Strahlungsteilchen auf unsere Atmosphäre, die die Moleküle ionisieren, so dass eine Mischung aus positiven und negativen Ionen entsteht.
- c) Das **Sonnenplasma** ist ein Plasma. Im Inneren der Sonne ist die Temperatur so hoch, dass Elektronen nicht an die Atomkerne gebunden sind. Die Atomkerne bewegen sich nackt (ohne Elektronen) durch ein freies Gas aus Elektronen.

Wir wollen die Bewegungsgleichungen der Ladungen zusammen mit den Maxwellgleichungen lösen. Hierzu nehmen wir an, dass die Bewegung so langsam ist, dass das  $\mathbf{B}$ -Feld keine Rolle spielt. Wir schreiben die inhomogene Maxwellgleichungen für die Ladungsdichte als

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (5.1)$$

und tragen der Tatsache Rechnung, dass im Plasma positive und negative Ladungen vorhanden sind:

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = \rho_+^{eq} + \delta\rho_+ + \rho_-^{eq} + \delta\rho_-. \quad (5.2)$$

Mit  $\rho_{\pm}^{eq}$  bezeichnen wir die Gleichgewichtsladungsdichte, bei der sich beide Ladungsdichten neutralisieren:

$$\rho_+^{eq} + \rho_-^{eq} = 0, \quad (5.3)$$

und mit  $\delta\rho_{\pm}$  bezeichnen wir die Abweichung der Ladungsdichte vom Gleichgewichtswert. Wir können die Abweichung der positiven Ladungsdichte vom Gleichgewichtswert vernachlässigen  $\delta\rho_+ \approx 0$ , weil die Atomrümpfe drei Größenordnungen schwerer als die Elektronen sind und sich deshalb viel langsamer als die Elektronen bewegen. Klassisch ist das ein fieser unerlaubter Trick, der die Materie vom Kollabieren in einen Punkt künstlich abhält. Wir können diese Approximation nur quantenmechanisch rechtfertigen. Unsere inhomogene Maxwellgleichung vereinfacht sich zu

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\delta\rho_-}{\epsilon_0}. \quad (5.4)$$

### 5.1.2 Bewegungsgleichung

Ein Elektron unterliegt der Bewegungsgleichung

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (5.5)$$

wenn es nicht gerade mit einem anderen Elektron wechselwirkt. Die Wechselwirkungen machen aus den einzelnen Elektronen ein kollektives Elektronensystem - ein Gas bzw. eine Flüssigkeit-. Analog zur Beschreibung nicht geladener Flüssigkeiten und Gase ist es sinnvoll zu einer Kontinuumsbeschreibung mit der Elektronenteilchendichte  $n(\mathbf{r}, t)$  und dem Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  überzugehen. Die Elektronenladungsdichte beträgt dann  $\rho_- = en(\mathbf{r}, t)$ , die Elektronenmassendichte  $m_e n(\mathbf{r}, t)$ . Wir erinnern an die, in der Mechanik behandelte Navier-Stokes Gleichungen der Hydrodynamik, bei denen die internen Wechselwirkungen durch Druckkräfte beschrieben werden, die wir hier gegenüber den elektrischen Wechselwirkungen vernachlässigen wollen.

Die Navier Stokes Gleichungen des Plasmas lauten dann:

$$m_e n(\mathbf{r}, t) \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \frac{\mathbf{F}}{V} = ne(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung.} \quad (5.7)$$

Gleichungen 5.6 und 5.7 sind die klassischen Kontinuumsbewegungsgleichungen des Elektronengases. Der einzig von einem normalen Gas abweichende Term ist die elektrische Kraftdichte  $ne\mathbf{E}$ .

Wir überzeugen uns leicht, dass

$$n(\mathbf{r}, t) = n^{eq}, \mathbf{v} = \mathbf{0}, \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

sowohl die inhomogene Maxwellgleichung, als auch die Navierstokesgleichungen löst und die Gleichgewichtssituation beschreibt, da keine Größe zeitabhängig ist. Ist das Plasma nicht mehr im Gleichgewicht, dann ändert sich die Situation, und alle Größen weichen von den Gleichgewichtswerten ab:

$$n(\mathbf{r}, t) = n^{eq} + \delta n(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \mathbf{E} \neq \mathbf{0}. \quad (5.9)$$

Wir nehmen an, dass die Abweichung des Systems vom Gleichgewicht klein sind und linearisieren alle Gleichungen, d.h. dass wir alle Terme höherer als linearer Ordnung in  $\delta n, \mathbf{E}, \mathbf{v}$  vernachlässigen. Die Navier Stokes Gleichungen vereinfachen sich zu

$$m_e n^{eq} \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = n^{eq} e \mathbf{E} \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \nabla \cdot (n^{eq} \mathbf{v}) = 0 \quad \text{Kontinuitätsgleichung.} \quad (5.11)$$

Wir nehmen die Divergenz der Gleichung 5.10 und setzen die inhomogene Maxwellgleichung 5.4 ein:

$$\nabla \cdot m_e n^{eq} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = n^{eq} e \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m_e \nabla \cdot n^{eq} \mathbf{v} = n^{eq} e \frac{e \delta n}{\epsilon_0}. \quad (5.13)$$

Schließlich ersetzen wir die Divergenz der Teilchenstromdichte in 5.13 mit der Kontinuitätsgleichung 5.11 und finden

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} m_e \delta n = \frac{n^{eq} e^2}{\epsilon_0} \delta n \quad (5.14)$$

$$\delta \ddot{n} = - \left( \frac{n^{eq} e^2}{m_e \epsilon_0} \right) \delta n. \quad (5.15)$$

Gleichung 5.15 ist eine Oszillatorgleichung der Form

$$\delta \ddot{n} = -\omega_p^2 \delta n \quad (5.16)$$

mit der Plasmafrequenz  $\omega_p$ , wobei

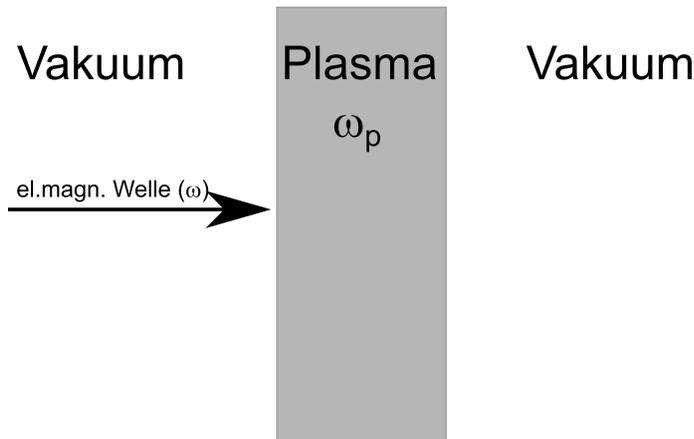
$$\omega_p^2 = \frac{n^{eq} e^2}{m_e \epsilon_0} \quad (5.17)$$

gilt. Die Elektronendichte schwingt mit der Plasmafrequenz  $\omega_p$  um die Gleichgewichtsdichte, welche das Plasma neutralisiert herum.

### 5.1.3 Ein durch elektromagnetische Wellen getriebenes Plasma

Trifft eine elektromagnetische Welle mit Frequenz  $\omega \neq \omega_p$ , wie in Abbildung 5.1, aus einem Vakuum auf ein Plasma, so wird aus dem Plasma ein getriebener harmonischer Oszillator. Es werden also Schwingungen im Plasma mit der Frequenz  $\omega \neq \omega_p$  erzwungen. Aus der Mechanikvorlesung wissen wir, dass die Oszillationen eines getriebenen Oszillators stark davon abhängen, ob die treibende Frequenz kleiner oder größer als die Resonanzfrequenz (hier die Plasmafrequenz  $\omega_p$ ) ist.

Für Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz  $\omega < \omega_p$  verhält sich das Plasma wie ein ideales Metall und lässt kein elektrisches Feld in das Metall eindringen. Die Polarisation des Plasmas schwingt in Phase mit der dielektrischen Verschiebung  $\mathbf{D}$ . Die erregende Welle der dielektrischen Verschiebung  $\mathbf{D}$  sowie die erzeugte elektrische Welle der Polarisation  $\mathbf{P}$  interferieren in Vorwärtsrichtung



**Abbildung 5.1:** Eine elektromagnetische Welle trifft auf ein Plasma

destruktiv, so dass die Gesamtwelle sich nicht in Vorwärtsrichtung ausbreiten kann. Die erregende Welle wird deshalb am Plasma reflektiert.

Wenn Sie schon einmal in den Spiegel geschaut haben, können Sie abschätzen in welchem Frequenzbereich die Plasmafrequenz eines Metalles liegt.

Radiokurzwellen werden von der Ionosphäre reflektiert und waren in der vorsatellitären Kommunikationsära eine Methode mit der anderen Seite des Globus zu kommunizieren (Abbildung 5.2).

Erregen wir das Plasma mit Frequenzen oberhalb der Plasmafrequenz, wird die Amplitude der Polarisation  $\mathbf{P}$  klein gegen die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  der durchlaufenden Welle. Zusätzlich schwingt die Polarisation  $\mathbf{P}$  in Gegenphase zur dielektrischen Verschiebung und die Interferenz von erregender Welle und der Polarisation wird in Vorwärtsrichtung konstruktiv. Das Plasma ist bei Frequenzen oberhalb der Plasmafrequenz transparent.

Metalle werden im Ultravioletten transparent. Die Ionosphäre ist für UKW Wellen transparent was die heutige satellitäre Kommunikation durch die Ionosphäre mit geostationären Satelliten weit außerhalb der Ionosphäre ermöglicht. Es erlaubt Ihnen auch Ihren Blick jenseits der Atmosphäre zu richten und zu beobachten, was es dort alles zu sehen gibt.

Thomas Dabisch hat eine Modellionosphäre in Form von einer Anordnung von parallel zueinander angeordneten Neonröhren, die so eine Fläche der Ionosphäre simulieren. Wenn wir die Neonröhren einschalten, wird aus dem Leuchtgas der Neonröhren ein Plasma. Wir schicken zwei Signale durch die Neonröhren, eines mit Mikrowellen, und ein zweites mit Dezimeterwellen. Auf der anderen Seite platzieren wir entsprechende Empfänger. Sind die Neonröhren ausgeschaltet, so zeigen beide Empfänger ein Signal an. Schaltet man die Neonröhre an, so liegt die Frequenz der Dezimeterwellen unterhalb der Plasmafrequenz der Neonröhren und das Signal wird an den Neonröhren reflektiert. Ein des Experiments Video befindet sich auf dem E-learning Server.

Wir schließen mit dem Fazit, dass es sich bei Plasmaschwingungen um eine klassische Bewegung um die klassisch nicht erklärte neutrale Konfiguration des Plasmas mit mittlerer Teilchendichte  $n^{eq}$  handelt.

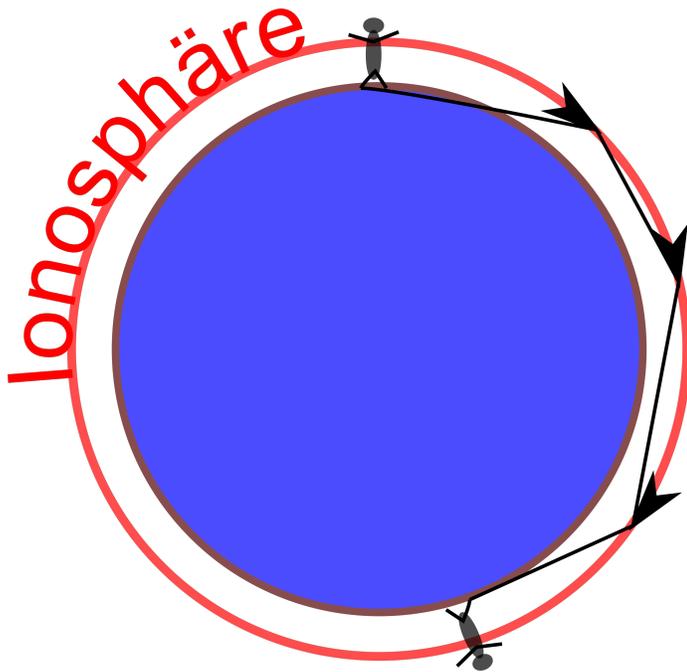


Abbildung 5.2: Kommunikation mit Kurzwellen unter Ausnutzung des Plasmas der Ionosphäre





## Kapitel 6

# Thermische und quantenmechanische Effekte

In dieser Vorlesung untersuchen wir, wie sich Ladungen im thermischen Gleichgewicht anordnen. Eine wichtige Rolle spielt dabei eine thermische Abfalllänge, die kontrolliert, wie dick eine thermische Ladungswolke ist. Wir zeigen, dass ein Elektron, welches sich um einen Kern bewegt, die Gesamtenergie minimiert, jedoch unter Einhaltung der quantenmechanischen Unschärferelation. Der sich einstellende Unschärfekompromissabstand ist der Bohrsche Radius. Wir fassen die besprochenen Szenarios aus Vorlesung 5 und Vorlesung 6 zusammen. Wir definieren die Kapazität zweier entgegengesetzt geladener Metalle. Wir zeigen, dass die Energie einer Ladungsanordnung im, durch die Ladungen aufgebauten, elektrischen Feld gespeichert ist.

## 6.1 Maxwell-Gleichungen und thermodynamisches Gleichgewicht

In Vorlesung 5 haben wir ein verdünntes Plasma studiert, welches mit der Plasmafrequenz um die neutrale Ruhelage schwingt. Dabei nahmen wir an, dass die Ladungen sich frei bewegen können. Genauer müssen wir verlangen, dass während einer Schwingungsdauer des Plasmas die Kollisionswahrscheinlichkeit einer Ladung mit anderen Ladungen vernachlässigbar klein ist. Ist dies nicht der Fall, das heißt wir beobachten das System über einen Zeitraum in dem jede Ladung mehrmals mit einer anderen Ladungen kollidiert, so werden aufgrund der Kollisionen die klassischen Bewegungsgleichungen unbrauchbar. Wir brauchen neue Gleichungen, die dem statistischen Kollisionsverhalten der Ladungen gerecht wird. Dazu müssen wir die Maxwell-Gleichungen nicht mit den Bewegungsgleichungen kombinieren sondern mit einer thermodynamischen Gleichgewichtsverteilung (Boltzmannverteilung).

Die Ladungsverteilung ist dann durch einen Wettstreit zwischen zwei gegenläufigen Trends bestimmt. Zum einen wirken elektrostatische Kräfte, die die Ladungsverteilung ins Energieminimum drängen, zum anderen verursachen die Kollisionen alle möglichen Konformationen der Ladungen und versuchen so, die Entropie des Systems zu maximieren.

Beispiele für solche thermische Ladungssysteme sind Ionen in Elektrolytlösungen oder auch Elektronen und Löcher in einem Halbleiter an einem pn-Übergang.

Abbildung 6.1 zeigt eine Elektroden/Elektrolyt-Grenzfläche. In der Elektrode befinden sich unbewegliche Ladungen, im Elektrolyten befinden sich bewegliche Ionen, die von der Elektrolytflüssigkeit in Folge der thermischen Bewegung der Flüssigkeitsmoleküle herungestoßen werden. Aus energetischen Gründen wollen die Ionen die unbeweglichen Ladungen neutralisieren. Durch die Stöße der Flüssigkeitsmoleküle werden die Ionen neugierig und versuchen möglichst viele Orte in der Flüssigkeit zu erkunden und so ihre Entropie zu maximieren.

Die unbeweglichen Ladungen an der Grenzfläche entstehen zum Beispiel, wenn an der Elektrodenoberfläche gebundene Moleküle  $AH \rightarrow A^- + H^+$  dissoziieren in ein an die Elektrodenoberfläche gebundenes Molekül-Ion  $A^-$  und ein im Elektrolyten frei bewegliches  $H^+$ -Ion (Abbildung 6.2). im Halbleiter sind die unbeweglichen Ladungen mit vier Valenz Elektronen gebundene Donor- ( $As^+$ ) oder Akzeptor- ( $Ge^-$ ) atome, die in ein Silizium Gitter eingebaut sind. Arsen, das im neutralen Zustand fünf Valenzelektronen hat, wird in der Umgebung des Siliziumgitters gezwungen, sich so zu verhalten wie ein Siliziumatom und gibt sein fünftes Elektron ab, das dann im Halbleiter frei

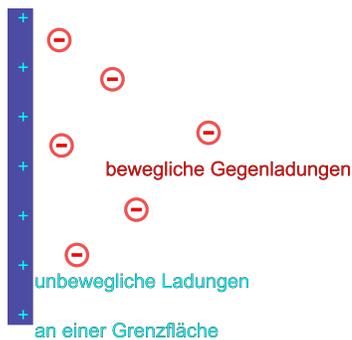


Abbildung 6.1: Diffuse Gegenionenladungswolke vor einer geladenen Elektrode

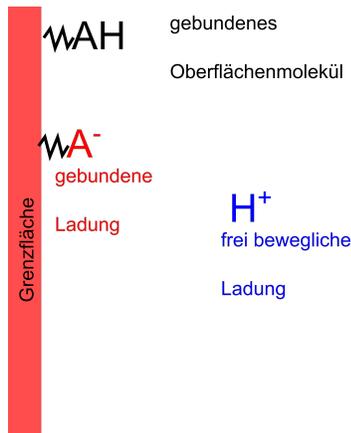


Abbildung 6.2: Dissoziation eines gebundenen Oberflächenmoleküls in gebundene und freie Ladungen an einer Elektroden/Elektrolyt-Grenzfläche

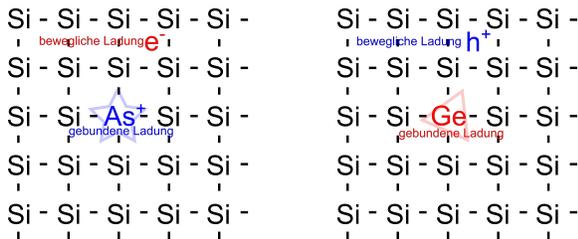


Abbildung 6.3: Gebundene und bewegliche Ladungen in einem Halbleiter

beweglich wird. Germanium mit normalerweise drei Valenzelektronen passt sich ebenfalls ans Siliziumgitter an und bindet ein viertes Elektron, woraufhin ein frei bewegliches Loch  $h^+$  (ein fehlendes Elektron) im Siliziumgitter entsteht (Abbildung 6.3).

Für die Gesamtladungsdichte benutzen wir die Poissongleichung (bzw. die inhomogene Maxwellgleichung):

$$\nabla^2 \phi = -\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_-}{\epsilon_0} - \frac{\rho_+}{\epsilon_0}, \tag{6.1}$$

und gleichzeitig nehmen wir an, dass sowohl die positive, als auch die negative Ladungsdichte einer Boltzmannverteilung

$$\rho_{\pm}(\mathbf{r}) = \rho_{\pm}^{\infty} e^{-E_{\pm}(\mathbf{r})/k_B T} \tag{6.2}$$

mit der jeweiligen Energie

$$-E_{\pm}(\mathbf{r}) = z_{\pm} e \phi(\mathbf{r}) \tag{6.3}$$

folgt, wobei die Ladung der beiden Ladungsträger  $z_{\pm}e$  mit den Valenzen  $z_+$  und  $z_-$  beträgt, und die Ladungsdichten  $\rho_{\pm}^{\infty}$  die Ladungsdichten sind, die die freien Ladungsträger weit weg von jeglichen geladenen unbeweglichen Ladungsträgern annehmen.

Wir setzen die Boltzmannverteilung (Gleichung 6.2) in die Poissongleichung 6.1 ein, und erhalten

die Poisson-Boltzmann-Gleichung

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_+^\infty}{\epsilon_0} e^{-z_+ e \phi(\mathbf{r})/k_B T} - \frac{\rho_-^\infty}{\epsilon_0} e^{-z_- e \phi(\mathbf{r})/k_B T}. \quad (6.4)$$

Die Poisson-Boltzmann-Gleichung ist eine komplizierte nichtlineare partielle Differentialgleichung für das Gleichgewichtspotenzial, welches sich durch die beweglichen Ladungen und unbeweglichen Ladungen einstellt.

Sie vereinfacht sich zur Debye-Hückel-Gleichung, wenn wir annehmen das die thermische Energie der Teilchen groß gegen die sich aufbauenden elektrostatischen Energien sind ( $ze\phi/k_B T \ll 1$ ). Dies ist der Fall für schwach verdünnte Ladungssysteme. Wir können in diesem Fall die Exponentialfunktionen Taylor-entwickeln ( $e^{\pm x} \approx 1 \pm x$ )

und finden so:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_+^\infty + \rho_-^\infty}{\epsilon_0} + \frac{\rho_+^\infty z_+ e + \rho_-^\infty z_- e}{\epsilon_0 k_B T} \phi(\mathbf{r}) \quad (6.5)$$

Benutzen wir Teilchenzahl-dichten  $n_\pm^\infty$  anstatt der Ladungsdichten  $\rho_\pm^\infty = z_\pm e n_\pm^\infty$  schreibt sich die Debye-Hückel-Gleichung wie folgt:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) - \frac{n_+^\infty z_+^2 e^2 + n_-^\infty z_-^2 e^2}{\epsilon_0 k_B T} \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.6)$$

bzw. mit der Abkürzung

$$\kappa := \sqrt{\frac{n_+^\infty z_+^2 e^2 + n_-^\infty z_-^2 e^2}{\epsilon_0 k_B T}} \quad (6.7)$$

finden wir

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) - \kappa^2 \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (6.8)$$

In einer Dimension vereinfacht sich die Debye-Hückel-Gleichung zu

$$\partial_x^2 \phi(x) - \kappa^2 \phi(x) = 0 \quad (6.9)$$

mit den einfachen Lösungen

$$\phi(x) \propto e^{-\kappa x} \quad (6.10)$$

und wir sehen, dass  $\kappa^{-1}$  eine exponentielle Abfallslänge ist.

Bei Elektrolyten wird die Abfallslänge  $\kappa^{-1}$  als Debyelänge bezeichnet. In Metallen trägt sie den Namen Thomas-Fermi-länge. Beim pn-Übergang in Halbleitern heißt sie die Dicke der Raumladungszone.

Die Länge  $\kappa^{-1}$  misst, wie weit die Neugierde der beweglichen Ladungen reicht, bevor die beweglichen Ladungen merken, dass sie zu ihren gebundenen Gegenladungen zurückkehren sollten.

Wird eine Störladung mit entgegengesetzter Ladung der beweglichen Ladungen eingebracht, so bildet sich eine diffuse Gegenladungswolke der Dicke  $\kappa^{-1}$  aus. Weiter weg von der Störladung ist diese von der diffusen Gegenladungswolke abgeschirmt, so dass beide zusammen neutral erscheinen. Der Kompromiss zwischen Energieminimierung und Entropiemaximierung ist ähnlich wie bei der Schichtung unserer Erdatmosphäre (siehe die barometrische Höhenformel), allerdings wird das Gravitationspotenzial der Erde nicht durch die Luft gemacht, während das elektrostatische Potenzial durch die unbeweglichen und beweglichen Ladungen zu vergleichbaren Anteilen hervorgerufen wird.

Die Debyelänge wird um so kleiner, je größer die Teilchendichte der beweglichen Ladungsträger  $n_{\pm}^{\infty}$  wird. Wenn sie Milch in ihren Kaffee rühren, bildet sich eine schöne mokkafarbene Dispersion, in dem die negative geladenen Milchteilchen von positiven Gegenionen abgeschirmt werden, und die Milchteilchen sich gegenseitig beginnen abzustößen, sobald sie sich näher als die Debyelänge kommen. Wenn Sie jetzt noch etwas Essigessenz dazugeben, schrumpft die Debyelänge auf wenige Nanometer zusammen. Bei so kleinen Abständen dominiert nicht die elektrosatische Abstoßung der Milchteilchen, sondern die van-der-Waals Anziehung. Die Milchteilchen koagulieren und flocken aus. Das gleiche passiert, wenn Sie Ihren Kaffee salzen anstatt ihn zu zuckern. Ein Experiment mit Modellkaffee aber echter Milch befindet sich auf dem E-learning Server

DNA ist eine Polyelektrolytkette in der die Phosphatgruppen in wässrigen Lösungen zu negativen Phosphatanionen dissoziieren, und die dadurch entstehenden  $H^+$ -Ionen eine Ladungswolke bilden. Die Ladungsdichte ist dabei so hoch, dass nicht die Debye-Hückel-Näherung, sondern die volle Poisson-Boltzmann-Gleichung benutzt werden muss. Die Poisson-Boltzmann-Gleichung ist eine klassische Vielteilchengleichung, bei der das Problem des klassischen Kollabierens der Ladungen nicht behoben ist. Entsprechend befinden sich nicht alle  $H^+$ -Ionen in einer Ladungswolke mit der Ausdehnung der Debye-länge, sondern ein Anteil der  $H^+$ -Ionen kondensiert im Inneren der DNA-Helix, so dass die DNA für die Debye-Hückel-artigen  $H^+$ -Ionen effektiv schwächer geladen erscheint. Für die Debye-Hückel- $H^+$ -Ionen sind die elektrostatischen Wechselwirkungen dann wieder schwach genug, dass für diese die Debye-Hückel-Näherung benutzt werden kann.

## 6.2 Elektrostatische Energieminimierung mit Unschärfere- lation

Eine wesentliche quantenmechanische Eigenschaft eines Teilchens ist, dass es nicht mag, das man zuviel über es weiß. Sobald man versucht zuviel über es herauszufinden, ändert es seine Eigenschaften so ab, dass man nie mehr über es wissen kann als erlaubt ist. Es ist prinzipiell unmöglich den Ort und Impuls eines Teilchens genauer zu messen als mit Unschärfen die mindestens größer sind als

$$\Delta x \Delta p \geq h. \quad (6.11)$$

Hierbei ist  $h = 6.6 \times 10^{-34} Js$  das Plancksche Wirkungsquantum, eine Naturkonstante. Gleichung 6.11 heißt Unschärfere-  
lation.

Anwendung dieses Prinzips auf die Energie eines Elektrons, welches um ein Proton saust, führt uns bereits auf ein größenordnungmäßiges Verständnis des Aufbaus eines Atoms. Die Gesamtenergie eines Elektrons setzt sich aus seiner elektrostatischen und seiner kinetischen Energie zusammen:

$$E = E_{kin} + E_{elektrostatisch} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6.12)$$

Wir nehmen an, dass die Position des Elektrons mit der Unschärfe  $\Delta r$  behaftet ist, es also nicht genau auf dem Kern sitzt, sondern irgendwo in der Umgebung des Kerns. Aufgrund der Unschärfere-  
relation (Gleichung 6.11) besitzt es dann mindestens eine Impulsunschärfe von  $\Delta p = h/\Delta r$ . Wenn wir annehmen, dass die gesamte Energie nur durch Unschärfe der Größen zustande kommt beträgt die Gesamtenergie:

$$E = \frac{\Delta p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \Delta r} = \frac{h^2}{2m\Delta r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \Delta r} \quad (6.13)$$

Wir lassen das Elektron seine Ortsunschärfe so einstellen, dass die Gesamtenergie bei Einhaltung der Unschärferelation minimiert wird. Es gilt also

$$0 = \frac{dE}{d\Delta r} = -\frac{h^2}{m\Delta r^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\Delta r^2} \quad (6.14)$$

Es stellt sich also eine Ortsunschärfe von

$$a = \Delta r = -\frac{h^2 4\pi\epsilon_0}{me^2} = 0.5 \times 10^{-10} m \quad (6.15)$$

ein. Die Unschärfe  $a$  heißt Bohrscher Radius. Das Arrangement des Elektrons um den Atomkern ist damit ein Kompromiss zwischen zu vermeidender kinetischer Energie und elektrostatischer Energie bei Einhaltung der Unschärferelation.

## 6.3 Fazit

### 6.3.1 I) Elektrostatik und klassische Bewegungsgleichungen

beschreiben ein Plasma mit charakteristischer Plasmafrequenz

$$\omega_p^2 = \frac{n^{eq} e^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (6.16)$$

Die Plasmafrequenz ist eine kollektive Eigenschaft aller Elektronen, denn es geht die Teilchendichte  $n^{eq}$  ein.

### 6.3.2 II) Elektrostatik und thermische Verteilung

führt zu einer charakteristischen Abschirmlänge

$$\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{k_B T}{z_+^2 e^2 n_+^\infty + z_-^2 e^2 n_-^\infty}} \quad (6.17)$$

Die Abschirmlänge ist eine kollektive Eigenschaft aller Elektronen, denn es geht die Teilchendichte  $n^\infty$  ein.

### 6.3.3 III) Elektrostatik und quantenmechanische Unschärfe

führt zu einer charakteristischen Längenskala, dem Bohrradius:

$$a = \Delta r = -\frac{h^2 4\pi\epsilon_0}{me^2} = 0.5 \times 10^{-10} m \quad (6.18)$$

Der Bohrradius ist eine individuelle Eigenschaft eines einzelnen Elektrons in der Nähe eines Kerns.

## 6.4 Die Kapazität einer Anordnung

Ein Kondensator ist eine Vorrichtung, die es erlaubt entgegengesetzte Ladungen auf zwei voneinander separierten Metallteilen zu speichern. Haben wir nur ein Metallteil zum speichern, stellen wir uns vor, dass das zweite Metallteil mit der entgegengesetzten Ladung im unendlichen sitzt. Wir wollen zunächst berechnen welche Arbeit wir verrichten müssen um zwei Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  aus einem unendlichen Abstand auf den Abstand  $r_{12}$  zu bringen. Die Arbeit stellen wir uns aus der Perspektive der zweiten Ladung vor. Hierzu müssen wir die erste Ladung im elektrostatischen Potential der zweiten Ladung bewegen und erhalten die Arbeit

$$\Delta W = q_1 \phi_2(\infty) - q_1 \phi_2(\mathbf{r}_{12}) \quad (6.19)$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \quad (6.20)$$

Wenn wir beide Ladungen als Ladungsdichte auf den beiden Metalloberflächen verteilen so beträgt die extern zu leistende Arbeit:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int \int \frac{d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \rho_+(\mathbf{r}_1) \rho_2(\mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 |r_1 - r_2|}. \quad (6.21)$$

Der Faktor  $1/2$  vor dem Doppelintegral kommt daher, dass bei der Integration über jedes Paar an Positionen doppelt integriert wird.

Die positive (negative) Ladung auf dem ersten (zweiten) Metall erträgt:

$$Q_{\pm} = \int d^3\mathbf{r}_{\pm} \rho_{\pm}(\mathbf{r}_{\pm}), \quad (6.22)$$

wobei  $\rho_{\pm} = \rho\Theta(\pm\rho)$  jeweils nur die Ladungsdichte eines Vorzeichens bezeichnet. Wir definieren die Kapazität  $C$  der Anordnung über die extern zu erbringende Arbeit

$$\Delta W = \frac{1}{2} \frac{Q_{\pm}^2}{C} \quad (6.23)$$

und finden so einen Ausdruck für die inverse Kapazität

$$\frac{1}{C} = \frac{\int \int \frac{d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \rho_1(\mathbf{r}_1) \rho_2(\mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 |r_1 - r_2|}}{\int \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \rho_+(\mathbf{r}_1) \rho_+(\mathbf{r}_2)}. \quad (6.24)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte eine positive (negative) Ladung am Platz  $\mathbf{r}_{\pm} \pm d\mathbf{r}_{\pm}$  zu finden beträgt  $\rho_{\pm}(\mathbf{r}_{\pm})/Q_{\pm}$

Der Mittelwert des inversen Abstandes über beide Wahrscheinlichkeitsdichten ist dann

$$\left\langle \frac{1}{|r_1 - r_2|} \right\rangle = \frac{\int \int \frac{d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \rho_+(\mathbf{r}_1) \rho_2(\mathbf{r}_2)}{|r_1 - r_2|}}{\int \int d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \rho_+(\mathbf{r}_1) \rho_2(\mathbf{r}_2)}. \quad (6.25)$$

und wir können die Kapazität der Anordnung als

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left\langle |r_1 - r_2|^{-1} \right\rangle} \quad (6.26)$$

schreiben. Der gemittelte Abstand ist eine Funktion der Geometrie beider Metallkörper. Für einen Plattenkondensator mit Plattenabstand  $d$  und Plattenflächen  $A$  gilt:

$$\langle |r_1 - r_2|^{-1} \rangle = \frac{4\pi d}{A}; \quad (6.27)$$

für eine geladene Kugeloberfläche des Radius  $R$  (die zweite Metalloberfläche stellen wir uns im unendlichen vor) gilt:

$$\langle |r_1 - r_2|^{-1} \rangle = \frac{1}{R}. \quad (6.28)$$

für eine homogen geladene Kugel des Radius  $R$  (die nicht aus Metall sein darf) gilt

$$\langle |r_1 - r_2|^{-1} \rangle = \frac{6}{5R} \quad (6.29)$$

Mit Gleichung 6.26 können wir die Kapazität beliebig geformter Kondensatoren berechnen sofern wie die Ladungsverteilung auf ihnen verstanden haben.

## 6.5 Elektrostatische Energiedichte

Wir fügen alle Ladungen aus dem unendlichen so zusammen, dass die Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r})$  ist. Dann beträgt die Gesamtenergie der Konformation an Ladungen:

$$E = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (6.30)$$

Das elektrostatische Potenzial der Ladungsverteilung ist

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (6.31)$$

so dass wir die Gesamtenergie auch als

$$E = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) \quad (6.32)$$

schreiben können.

Wir benutzen die inhomogene Maxwellgleichung bzw. Poissongleichung:

$$\rho(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) \quad (6.33)$$

, und wir setzen diese in Gleichung 6.32 ein

$$E = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r} \phi(\mathbf{r}) \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) \quad (6.34)$$

$$= -\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r} \left[ \nabla \cdot (\phi(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r})) - (\nabla \phi(\mathbf{r}))^2 \right] \quad (6.35)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r} (\mathbf{E})^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r} \nabla \cdot (\phi(\mathbf{r}) \nabla \phi(\mathbf{r})). \quad (6.36)$$

Jetzt wenden wir den Satz von Gauss auf das zweite Integral in Gleichung 6.36 an und erhalten so:

$$E = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r}(\mathbf{E})^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \int d^2S \mathbf{n} \cdot (\phi(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r})). \quad (6.37)$$

Weit weg von der Ladungsverteilung fällt das elektrostatische Potenzial wie  $\phi \propto 1/r$  ab, der Gradient des Potenzials wie  $\nabla\phi \propto 1/r^2$ . Wenn wir eine Kugel vom Radius  $R$  als Berandung nehmen, ist das Oberflächenintegral in Gleichung 6.37 von der Größenordnung

$$-\frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{n} \cdot (\phi(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r})) d^2S \propto 1/R, \quad (6.38)$$

weshalb im Limes  $R \rightarrow \infty$  dieses Integral verschwindet:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_0}{2} \int d^2S \mathbf{n} \cdot (\phi(\mathbf{r})\nabla\phi(\mathbf{r})) \propto 1/R \rightarrow 0. \quad (6.39)$$

Wir bekommen den einfachen Ausdruck:

$$E = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{r}(\mathbf{E})^2 = \int d^3\mathbf{r}u(\mathbf{r}), \quad (6.40)$$

wobei

$$u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \quad (6.41)$$

die Energiedichte des Feldes bezeichnet. Wir sehen dass die Energie der Ladungsverteilung im elektrischen Feld gespeichert ist.

## 6.6 Übungen

### 6.6.1 Plattenkondensator im Wasser

In einem Wassertank werden zwei Platinplatten der Fläche  $A \gg d^2$  im Abstand  $d$  parallel zueinander eingeführt und entgegengesetzt mit der Flächenladungsdichte  $\sigma$  aufgeladen. Jetzt wird Reinstwasser eingefüllt. Welche Ionen kommen im Reinstwasser vor und in welcher Konzentration? Sie schütten  $\text{CaCl}_2$  ins Wasser, so dass eine  $10^{-3}$ -molare Lösung entsteht. Berechnen und skizzieren Sie den Potenzialverlauf und das elektrische Feld zwischen den Platten. Zeichnen Sie elektrische Feldlinien ein. Informieren Sie sich über den Millikan Versuch. Warum wurde dieser nicht mit Öltröpfchen in Wasser durchgeführt?

### 6.6.2 Plasmafrequenz und Fußball

Zwei Fußballmannschaften haben die Tendenz sich gegenseitig zu neutralisieren. Nehmen Sie an, die Ursache dieser Tendenz liege in elektrostatischen Wechselwirkungen. Machen Sie vernünftige Annahmen für die Masse und dreidimensionale Spielerdichte der Fußballspieler in einem typischen Spiel. Was ist eine typische Plasmafrequenz des Fußballspiels? Benutzen Sie diese Größen um die

*elektrische Ladung* eines Fußballspielers abzuschätzen. Betrachten Sie einen Fußballspieler als eine Kugel. Welches *Potenzial* hat ein Fußballspieler typischer Ladung? Wie teuer ist das Aufladen zweier Fußballmannschaften unter der Annahme typischer Energiepreise?

### 6.6.3 Experiment: Salzige Wasserfarbe

Verrühren Sie einen Tropfen schwarze Wasserfarbe in einem Glas Wasser, und verteilen beides auf zwei Gläser. Geben Sie zu einem Glas ein Löffel Kochsalz hinzu. Warten Sie drei Tage ab und betrachten beide Gläser erneut. Bestimmen Sie daraus mit Hilfe von Formeln der Vorlesung ab welcher Längenskala die van der Waals Anziehung elektrostatische Abstoßung überwiegt.

### 6.6.4 Programmierung: Bahnen hochenergetischer geladener Teilchen im Dipolfeld

Die magnetische Flussdichte des Erdmagnetfeldes lässt sich durch ein magnetisches Dipolfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot (3\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2\mathbb{1})}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^5}$$

beschreiben. Berechnen Sie numerisch die Bahnen eines hochenergetischen geladenen Teilchens, welches sich gemäß der Lorentzkraft  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  in diesem Dipolfeld bewegt. Verwenden Sie ein Eulerverfahren

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t + \Delta t) &\approx \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m} \Delta t \\ \mathbf{r}(t + \Delta t) &\approx \mathbf{r} + \mathbf{v} \Delta t\end{aligned}$$

mit geeignetem  $\Delta t$  und plotten Sie die Trajektorien zusammen mit den magnetischen Feldlinien (Höhenlinien von  $\frac{(\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{e}_\varphi}{r^3}$ ).





# Kapitel 7

## Dielektrika

In dieser Vorlesung untersuchen wir das Verhalten von Dielektrika. Wir diskutieren das Verhalten externer und interner Ladungen, die dielektrische Verschiebung, Polarisierung und elektrisches Feld im Dielektrikum, und berechnen die extern nutzbare Feldenergie. Kräfte auf Grenzflächen der Dielektrika haben Beiträge vom elektrischen Feld und von den internen Ladungen und sie hängen von der Orientierung der Grenzfläche zum Feld ab. Das elektrische Feld im Inneren eines Loches ist größer als im Dielektrikum weit weg vom Loch. Die Suszeptibilität eines Dielektrikums steigt mit der Atomdichte stärker als proportional zur Atomteilchendichte an. Wir leiten einen Zusammenhang zwischen der Einzelatom-Polarisierbarkeit und der kollektiven Größe der Suszeptibilität her.

## 7.1 Dielektrika

Wir haben bisher zwei konstituierende Gleichungen kennen gelernt, zum einen die konstituierende Gleichung eines **Vakuums**:  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , zum anderen die konstituierende Gleichung eines **Metalls**:  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ . Neben diesen beiden Materialien bilden Dielektrika, bei denen die internen Ladungen im wesentlichen gebunden sind, sich aber um kurze Distanzen aus ihrer Gleichgewichtslage herausbewegen können (in typischerweise entgegengesetzte Richtungen für entgegengesetzte Ladungen) eine wichtige Klasse, auf elektrische Felder reagierender Ladungen. Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass Ladungen, ob interne- oder externe-, nicht unterscheiden können, ob die Kräfte, die auf sie wirken, von internen oder externen Ladungen erzeugt wurden. Der Begriff intern oder extern ist eine theoretische Klassifizierung, die sich physikalisch nicht feststellen lässt. Für eine lineare Reaktion der internen Ladungen auf ein elektrisches Feld erwarten wir eine Polarisation des Dielektrikums, die eine lineare Funktion des polarisierenden elektrischen Feldes ist. Die konstituierende Gleichung eines **Dielektrikums** lautet deshalb:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (7.1)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor  $\chi$  die elektrische Suszeptibilität genannt wird. Der Anteil der dielektrischen Verschiebung  $\mathbf{D}$  am elektrischen Feld finden wir aus der Definition der Aufteilung des elektrischen Feldes in Polarisation und dielektrische Verschiebung:

$$\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \chi \mathbf{E}. \quad (7.2)$$

Lösen wir Gleichung 7.2 nach der dielektrischen Verschiebung auf, so finden wir:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}. \quad (7.3)$$

An Stelle der elektrischen Suszeptibilität kann man auch die relative Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon_r = (1 + \chi) \quad (7.4)$$

benutzen.

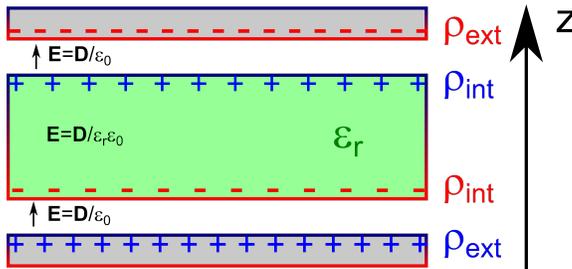


Abbildung 7.1: Ein Dielektrikum im Kondensator

Das am einfachsten zu betrachtende Phänomen, welches in einem in ein elektrisches Feld eingebrachtes Dielektrikum auftritt, können wir in einem Plattenkondensator studieren. Wir bringen eine externe Ladungsdichte entgegengesetzten Vorzeichens auf die beiden metallischen Platten des Kondensators auf (Abbildung 7.1), und füllen den Kondensator mit einem Dielektrikum. Aus didaktischen Gründen lassen wir kleine (infinitesimale) Luftspalte (Vakuumpalte) zwischen den Metallplatten und der Dielektrikumoberfläche. So können wir externe und interne Ladungen besser

unterscheiden. Die Ladungen im Dielektrikum haben wir nicht unter Kontrolle. Sie sind reagierende und damit interne Ladungen. Externe Ladungen im Dielektrikum gibt es also nicht was wir durch

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0} = 0 \quad (7.5)$$

ausdrücken können. Die Divergenz der dielektrischen Verschiebung verschwindet. Legen wir die  $z$ -Achse senkrecht zu den Kondensatorplatten vereinfacht sich Gleichung 7.5 aus Symmetriegründen zu  $\partial_z D_z = 0$ , woraus wir folgern können, dass die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung auf der Dielektrikum und Vakuumseite der Dielektrikum/Vakuum-Grenzfläche den selben Wert hat, also

$$\epsilon_0 \epsilon_r E_z^{Dielektrikum} = \epsilon_0 E_z^{Vakuum} \quad \text{Gauss im } \underline{\text{Vakuum}} \quad \sigma_{ext} - \sigma_{Pol}, \quad (7.6)$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen in Gleichung 7.6 den Satz von Gauss auf den infinitesimalen Vakuumpalt angewandt haben. Im Dielektrikum hat das elektrische Feld nicht denselben Wert wie auf der Vakuumseite sondern ist auf einen Wert  $E_z^{Dielektrikum} = E_z^{Vakuum} / \epsilon_r$  gegenüber dem Vakuum, aber nicht - wie im Metall - auf einen verschwindenden Wert  $E_z^{Metall} = 0$ , abgeschwächt.

## 7.2 Elektrostatische Energiedichte im Dielektrikum

Wenn wir Ladungen in einem elektrostatisches Potenzial platzieren, muss die hierfür nötige Arbeit aufgebracht werden. Als Theoretiker stelle ich mir vor, das dem Experimentator die Platzierung der Ladungen in zwei Schritten gelingt. Zunächst platziert der Experimentator die externen Ladungen in dem Potenzial, verlässt die Arena blitzschnell (schneller als physikalisch erlaubt) um sich schlafen zu legen, überlässt die Reaktion des Systems, nämlich die Platzierung der internen Ladungen dem System und kann mit Fug und Recht behaupten dem System nur die externe innere Energie

$$U_{ext} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \rho_{ext}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) \quad (7.7)$$

hinzugefügt zu haben. Dabei ist das Potenzial  $\phi$  allerdings bereits das Endpotenzial welches sich durch alle Ladungen einstellen wird. Der Rest der dem elektrischen Feld zugeführten Energie muss jemand anderes, nämlich die Materie dem elektrischen Feld zuführen (Im Falle des Dielektrikums ist die von der Materie dem Feld zugeführte Energie negativ). Wir drücken die externe Ladungsdichte  $\rho_{ext} = \nabla \cdot \mathbf{D}$  über die dielektrische Verschiebung aus und setzen in Gleichung 7.7 ein. Wir finden

$$U_{ext} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} (\nabla \cdot \mathbf{D}) \phi(\mathbf{r}) \quad (7.8)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{D} \cdot (-\nabla \phi(\mathbf{r})) + \int_{\partial V \rightarrow 0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA \quad (7.9)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}, \quad (7.10)$$

wobei wir von Gleichung 7.8 auf Gleichung 7.9 partiell integriert haben und das Oberflächenintegral, wie bei der Ableitung der externen Energiedichte des Vakuums auch, verschwindet. Wir finden so die extern benötigte Energiedichte zum Aufbau des Feldes im Dielektrikum:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}, \quad (7.11)$$

und bezeichnen diese als die Feldenergie im Dielektrikum. Es ist:

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \left(-\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}\right) .$$

wahre Feldenergiedichte      extern nutzbare Feldenergiedichte der Materie      materieintern genutzte Feldenergiedichte

(7.12)

Für eine Material mit positiver elektrischer Suszeptibilität sinkt die Energie des Materials, je stärker das elektrische Feld ist.

### 7.3 Brechungsgesetz für das elektrische Feld

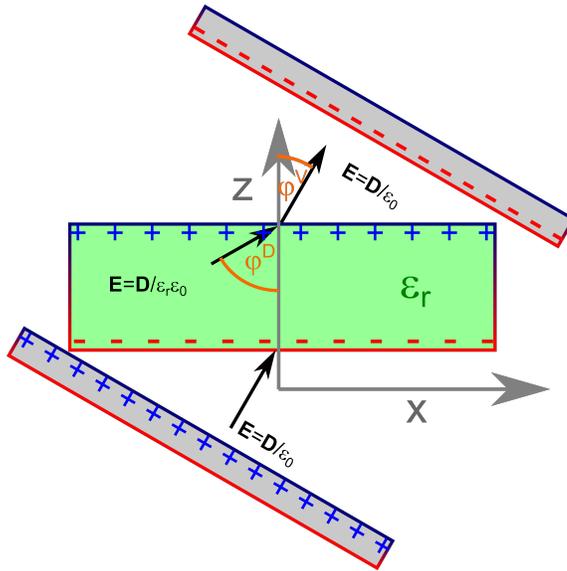


Abbildung 7.2: Ein Dielektrikum im gedrehten Kondensator

Wir bringen wieder ein Dielektrikum in einen Plattenkondensator ein und richten die Dielektrikum-/Vakuum-Grenzfläche senkrecht zur  $z$ -Koordinate aus. Den Plattenabstand des Kondensators vergrößern wir gegenüber der Situation in Abbildung 7.1 und drehen den Kondensator, so dass der Normalenvektor des Kondensators einen Winkel  $\varphi^V$  mit der  $z$ -Richtung einschließt (Abbildung 7.2). Wir zerlegen das elektrische Feld in seine  $x$ - und  $z$ -Komponente:

$$\mathbf{E}^V = \begin{pmatrix} E_x^V \\ E_z^V \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

$$\mathbf{E}^D = \begin{pmatrix} E_x^D \\ E_z^D \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

und folgern aus  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{ext} = 0$  an der Vakuum/Dielektrikum-Grenzfläche dass die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung stetig ist:

$$D_z^V = D_z^D. \quad (7.15)$$

Wir denken uns eine infinitesimale Schleife der Fläche  $A$ , welche durch die Grenzfläche läuft, benutzen  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  und den Satz von Stokes und folgern, wie schon beim Metall, dass die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes auf beiden Seiten identisch ist.

$$E_x^V = E_x^D \quad (7.16)$$

Wir kombinieren die Gleichungen 7.15 und 7.16 zu

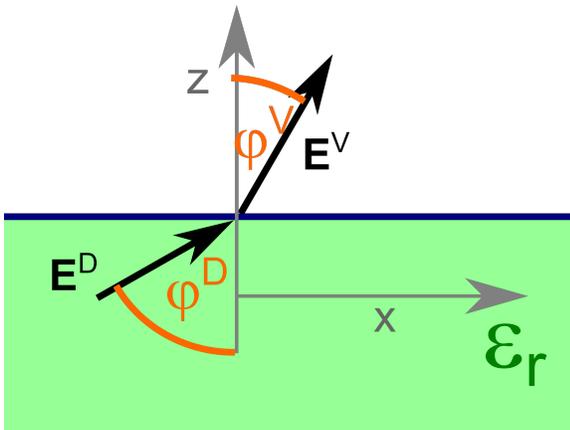
$$\begin{pmatrix} E_x^D \\ \epsilon_r E_z^D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x^V \\ E_z^V \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Das Verhältnis der beiden elektrischen Feldkomponenten drücken wir durch den Winkel  $\varphi$  des Feldes zur  $z$ -Achse aus und finden so

$$\frac{\tan \varphi^D}{\epsilon_r} = \frac{E_x^D}{\epsilon_r E_z^D} = \frac{E_x^V}{E_z^V} = \tan \varphi^V \quad (7.18)$$

bzw.

$$\varphi^D = \arctan(\epsilon_r \tan \varphi^V). \quad (7.19)$$



**Abbildung 7.3:** Das elektrische Feld wird im Dielektrikum vom Lot der Grenzfläche weggebrochen

Das elektrische Feld wird im Dielektrikum also vom Lot auf die Grenzfläche weggebrochen, wie in Abbildung 7.3 dargestellt.

## 7.4 Kraft auf ein Dielektrikum

Wenn wir ein Dielektrikum teilweise in einen Plattenkondensator einbringen (Abbildung 7.4), verläuft die Stirnseite des Dielektrikums parallel zum elektrischen Feld. Wir haben gesehen, dass die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes an einer Grenzfläche stetig ist. Mit diesem Argument finden wir, dass die elektrischen Felder auf der Vakuum und Dielektrikum Seite identisch sind und wir verzichten auf eine Indizierung des elektrischen Feldes. Die extern nutzbare Energiedichte ist

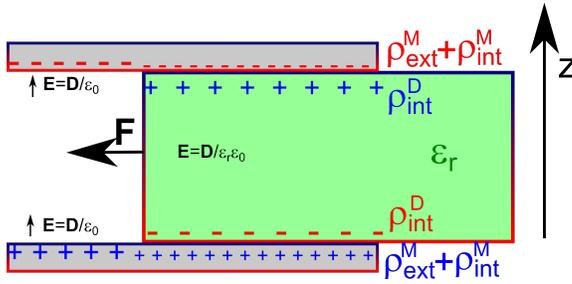


Abbildung 7.4: Ein Dielektrikum wird in den Kondensator gezogen

im Dielektrikum größer als im Vakuum. Quantenelektrodynamisch gesehen ist das elektrische Feld ein Ansammlung von Photonen. Es ist hilfreich sich die extern nutzbare Energie des Feldes als Photonendruck vorzustellen, mit dem die Photonen auf die Grenzfläche drücken.

$$p^{D,V} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^{D,V} \quad (7.20)$$

Der Photonendruck ist auf der dielektrischen Seite größer als im Vakuum weshalb das Dielektrikum in den Kondensator hineingedrückt wird. Im E-learning sehen Sie einen Film, bei dem Nitrobenzol in einen Kondensator hineingezogen wird, wenn eine elektrische Spannung an den Kondensator angelegt wird. Beachten Sie, dass das Phänomen nur von externen Gesichtspunkten aus einfach ist. Während des Hineinziehens wandeln sich alle möglichen internen Energien um und es treten auch interne Ladungen auf den metallischen Kondensatorplatten auf, die Reaktion der Ladungsverteilung auf den Platten auf die extern kontrollierte Lage des Dielektrikums beschreiben. Beachten Sie zudem, dass keine Ladungen in Richtung des elektrischen Feldes, sondern nur senkrecht zu diesem makroskopisch bewegt werden, während sich das Dielektrikum bewegt. Es wird deshalb keine Arbeit  $dW$  an den Ladungen des Dielektrikums während der Verschiebung  $ds$  verrichtet.

$$dW = \mathbf{F}_{intLadungen}^D \cdot ds = \sigma_{int}^D \mathbf{E}^D \cdot ds dA = 0 \quad (7.21)$$

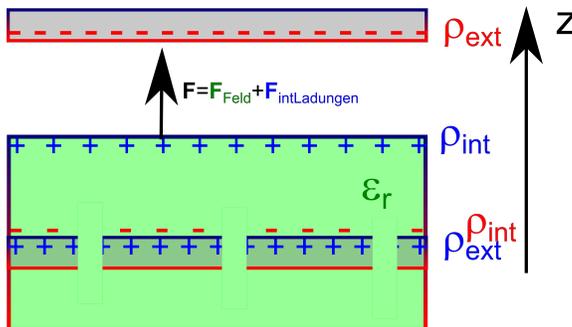


Abbildung 7.5: Die Kraft auf eine Dielektrikum/Luft-Grenzfläche ist größer wenn die Grenzfläche senkrecht zum Feld verläuft. Es drücken die Photonen und interne Ladungen.

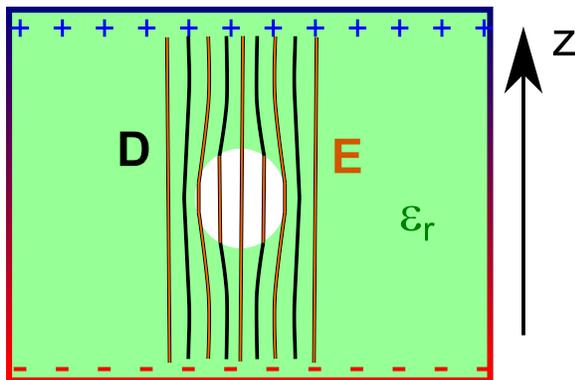
Dies ändert sich, wenn wir einen löchrigen Plattenkondensator in eine dielektrische Flüssigkeit so eintauchen, dass die Platten parallel zur Dielektrikum/Luft-Grenzfläche verlaufen (Abbildung

7.5). Hier tritt neben dem Photonendruck eine weitere Kraft auf die internen Ladungen an der Grenzfläche auf, die

$$d\mathbf{F}_{intLadungen}^D = \sigma_{int}^D \mathbf{E}^D dA = (-\mathbf{n}^D \cdot \mathbf{P}^D) \mathbf{E}^D dA \quad (7.22)$$

beträgt. Die Kraft eines Feldes normal zur Grenzfläche ist größer als die entsprechende Kraft auf eine Grenzfläche parallel zum Feld.

## 7.5 Elektrische Felder in dielektrischen Löchern



**Abbildung 7.6:** Ein Loch im Dielektrikum. Die elektrische Feldstärke (Dichte der  $\mathbf{E}$ -Feldlinien) im Loch ist größer als weit weg vom Loch. Frage: Was ist die relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  dieser Abbildung. Warum enden  $\mathbf{E}$ -Feldlinien am Rand des Loches  $\mathbf{D}$ -Feldlinien aber nicht? Ist  $D_{innen}$  größer oder kleiner als  $D_{ext}$ ?

In einem Dielektrikum können einzelne Atome so betrachtet werden, als säßen sie in einem runden Loch des anderweitig als homogen verschmierten Dielektrikums (Abbildung 7.7). Aus diesem Grund müssen wir uns das elektrische Feld in einem dielektrischen Loch, wie in Abbildung 7.6 dargestellt genauer betrachten. Wir stellen uns das Loch als kugelförmig mit dem Radius  $R$  vor und legen ein externes homogenes elektrisches Feld

$$\mathbf{E}_{ext} = E_{ext} \mathbf{e}_z \quad (7.23)$$

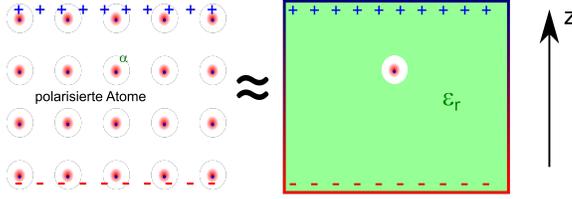
in  $z$ -Richtung an. Weit weg von dem Loch, hat das Loch keinen Einfluß auf das elektrische Feld, in der Nähe wird das elektrische Feld jedoch abgeändert. Wir verlangen also, dass das elektrische Feld mit Loch die Bedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{ext} \quad (7.24)$$

erfüllt, was identisch ist mit der Forderung an das elektrostatische Potential

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{ext} \cdot \mathbf{r} \quad (7.25)$$

Am Rande des Loches werden durch das externe Feld Polarisationsladungen induziert, die ein dipolares Zusatzfeld mit einer noch zu bestimmenden Punktdipolstärke  $\mathbf{p} = p \mathbf{e}_z$  im Dielektrikum



**Abbildung 7.7:** Ein Festkörper aus polarisierten Atomen, und die näherungsweise Bestimmung des Zusammenhangs von Polarisierbarkeit und Suszeptibilität

erzeugen und ein konstantes elektrisches Feld  $\mathbf{E}_{innen}$  im Inneren des Loches. Wir setzen deshalb das elektrische Feld als

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} E_{ext}\mathbf{e}_z + \frac{p\mathbf{e}_z}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1r^2 - 3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} & \text{für } r > R \\ E_{innen}\mathbf{e}_z & \text{für } r < R \end{cases} \quad (7.26)$$

an. Die Werte der beiden Konstanten  $p$  und  $E_{innen}$  bestimmen wir über die Stetigkeitsbedingungen der Normalkomponente  $\mathbf{D} \cdot \mathbf{r}/r$  und Tangentialkomponente  $\mathbf{E} \times \mathbf{r}/r$  am Rand des Loches. Wenn wir die Randbedingung nach dem Feld im Inneren des Loches auflösen, finden wir im Inneren des Loches ein elektrisches Feld, welches im Inneren

$$\mathbf{E}_{innen} = (1 + \chi/3)\mathbf{E}_{ext} \quad (7.27)$$

beträgt und gegenüber dem externen Feld verstärkt ist. Das Dipolmoment beträgt  $p = \chi \frac{4\pi}{3} R^3 E_{ext}$ . Wenn wir an ein einzelnes Atom (in Abwesenheit der anderen Atome des Dielektrikums) ein elektrisches Feld anlegen, so verschiebt sich die Elektronenwolke gegenüber dem Kern und es entsteht ein Dipolmoment  $p = \alpha\epsilon_0\mathbf{E}$  proportional zum angelegten elektrischen Feld. Im Dielektrikum muss das gleiche elektrische Feld, welches wir an das im Loch sitzende Atom an der Stelle des Atomes anlegen denselben Effekt haben. Die über das Volumen des Dielektrikums homogenisierte makroskopische Polarisation muss identisch dem atomaren Dipolmoment multipliziert mit der Teilchendichte  $n$  der Atome sein

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} \quad (7.28)$$

Wir finden deshalb, dass die elektrische Suszeptibilität nicht proportional der Teilchendichte ist, sondern

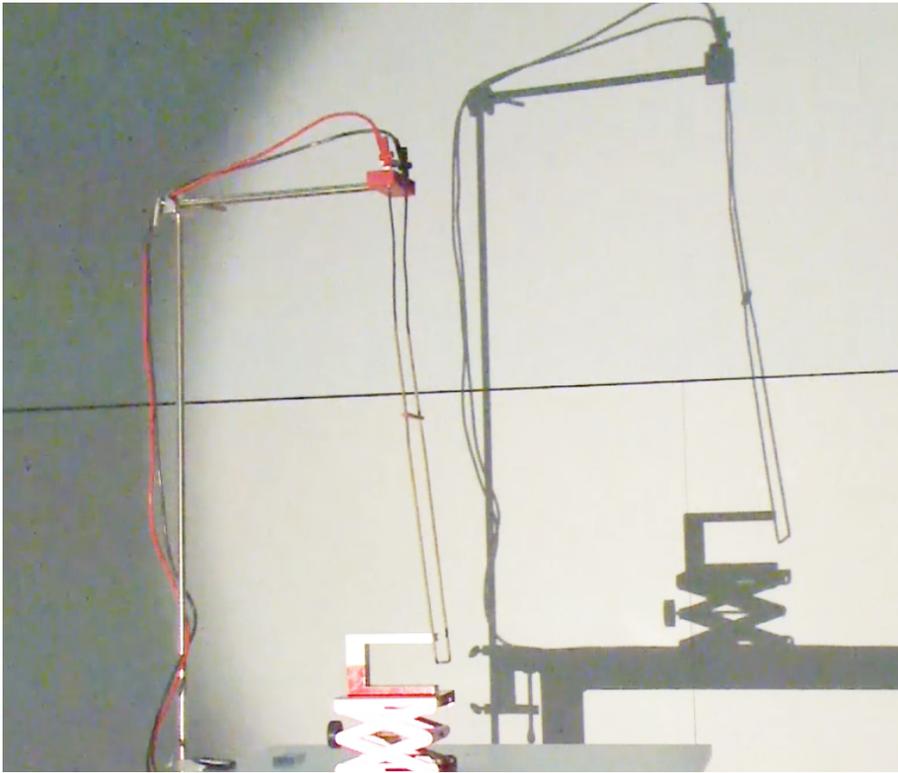
$$\chi = \frac{P}{\epsilon_0 E_{ext}} = \frac{P}{\epsilon_0 E_{innen}} \frac{E_{innen}}{E_{ext}} = \frac{n\alpha}{\epsilon_0} (1 + \chi/3), \quad (7.29)$$

was nach Auflösen nach der Suszeptibilität  $\chi$  auf

$$\chi = \frac{n\alpha}{\epsilon_0 - n\alpha/3} \quad (7.30)$$

führt. Gleichung 7.30 heißt Clausius Mosotti Relation und besagt, dass wenn wir ein Material mehr und mehr verdichten, die dielektrische Suszeptibilität stärker ansteigt als die Teilchendichte der Atome. Dieser Umstand ist eine Folge der kollektiven Polarisationsfelder der anderen Atome.





# Kapitel 8

## Magnetostatik

In dieser Vorlesung untersuchen wir einfache Phänomene der Magnetostatik. Hierzu gehen wir über zu einer Kontinuumsbeschreibung der fließenden Ladungen durch stationäre Stromdichten. Wir formulieren die Ladungserhaltung mittels der Kontinuitätsgleichung. Stationäre Stromlinien beginnen und enden nicht. Wir berechnen die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter. Wir bestimmen die Felder stromdurchflossener Drähte für wichtige symmetrische Situationen. Der Magnetismus von Permanentmagneten ist im Gegensatz zum durch stationäre Ströme in Drähten erzeugten Magnetismus ein quantenmechanisches Phänomen.

## 8.1 Magnetostatik

Wir haben in Vorlesung 7 die Phänomene der Elektrostatik abgeschlossen und wenden uns in dieser Vorlesung den Phänomenen der Magnetostatik zu. Streng genommen ist der Begriff der Magnetostatik falsch, denn wir haben gesehen, dass Magnetfelder nur dann Kräfte auf Ladungen ausüben, wenn diese sich bewegen. Wir fanden den Ausdruck der Kraft auf eine Ladung:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (8.1)$$

wobei der zweite Term in Gleichung 8.1 die Lorentzkraft auf eine bewegte Ladung bezeichnet. Um zu einer statischen (besser stationären) Beschreibung zu gelangen, in der sich zeitlich nichts ändert, wechseln wir zu einer Kontinuumsbeschreibung und führen die Ladungsdichte

$$\rho = \sum_i q_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad (8.2)$$

Das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ , die Stromdichte

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \quad (8.3)$$

und Kraftdichte

$$\mathbf{f} = \sum_i \mathbf{F}_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (8.4)$$

ein, die wir uns nicht mehr durch einzelne punktuelle Ladungen, sondern durch ein verschmiertes Kontinuum vorstellen. Mit diesen Definitionen erfüllt die Kraftdichte die Gleichung

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (8.5)$$

## 8.2 Kontinuitätsgleichung

Wir könnten versuchen, die verschmierten Ladungen so zu beschreiben, wie wir das für einzelne Ladungen getan haben, nämlich so, dass wir die einzelnen Ladungen als Funktion der Zeit mit einem mitgeführten Volumen  $V(t)$  verfolgen. Ein derartig verfolgtes Volumen ist in Abbildung 8.1 gezeigt.

Alle Ladungen in dem Volumen bleiben stets in dem Volumen. Für das mitgeführte Volumen ist die Bewegungsgleichungen für die darin enthaltene Ladung einfach. Da kein Teilchen das mitgeführte Volumen verlässt, ist die in dem Volumen enthaltene Ladung erhalten:

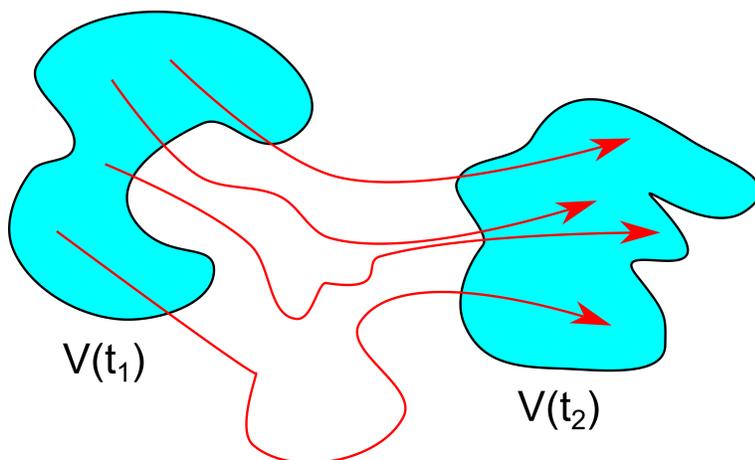
$$Q = \text{const.} \quad (8.6)$$

bzw.

$$0 = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r}, \quad (8.7)$$

die wir über die Ladungsdichte  $\rho(\mathbf{r}, t)$  ausdrücken. Die Ladungsdichte wird als Funktion des festen Ortes  $\mathbf{r}$  und der Zeit  $t$  angegeben. Es besteht hier nicht das Interesse, einzelne Ladungen zu verfolgen, sondern es werden Eigenschaftsveränderungen als Funktion der Zeit an einem bestimmten Ort beobachtet. Wir betrachten die mathematische Situation einer Differentiation des Ausdrucks

$$\frac{d}{dt} \int_0^t dt' f(t, t') = f(t, t'=t) + \int_0^t dt' \frac{\partial f(t, t')}{\partial t}. \quad (8.8)$$



**Abbildung 8.1:** Mitgeführtes Volumen  $V(t)$  zur Zeit  $t_1$  und zur Zeit  $t_2$ .

Die Differentiation erzeugt hier zwei Terme, weil das Integral sowohl über die obere Grenze als auch in der Funktion selbst von der Variable  $t$  abhängt. Wenn wir nach der oberen Grenze differenzieren, erhalten wir über den Hauptsatz der Integralrechnung die Funktion an der oberen Grenze zurück. Hier hängt aber auch die Funktion selbst von der oberen Grenze ab, und muss deshalb auch differenziert werden. In der Gleichung 8.7 hängt sowohl die Ladungsdichte von der Zeit ab als auch die Integrationsgrenzen, nämlich der Rand des Volumens  $V(t)$ . Wir führen die Differentiation nach der Zeit in 8.7 durch und erhalten analog zum eindimensionalen Fall

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{V(t)} d^3\mathbf{r} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \int_{\partial V} d^2S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} \cdot \frac{d\mathbf{r}_{\text{Rand}}}{dt} \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3\mathbf{r} + \int_{\partial V} (\rho \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{n} d^2S). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Die Differentiation nach den Integrationsgrenzen ergibt die Funktion  $\rho$  multipliziert mit der Richtung (der Normalen), in die sich der Rand des Volumens  $\partial V$  verändert. Nach der Kettenregel muss der Randpunkt dann nach der Zeit nachdifferenziert werden, was die Randgeschwindigkeit ergibt. Weil das Volumen ein mitgeführtes Volumen ist, ist diese Randgeschwindigkeit identisch mit der Geschwindigkeit der Ladungen an dieser Stelle.

Die Ladungsdichte kann sich also ändern ( $\partial \rho / \partial t \neq 0$ ), indem Ladungen mit der Stromdichte  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  durch den zur Zeit  $t$  fixierten Rand aus dem zur Zeit  $t$  fixierten Volumen abfließt. Sie kann aber nicht einfach im Inneren des Volumens verschwinden.

Wir können den zweiten Term in 8.9 mittels des Satzes von Gauß wieder in ein Volumenintegral umwandeln und finden

$$0 = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) d^3\mathbf{r}. \quad (8.10)$$

Da 8.10 für beliebige zur Zeit  $t$  fixierte Volumina gilt, muss der Integrand identisch Null sein und es gilt

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}. \quad (8.11)$$

Die Gleichung 8.11 heißt Kontinuitätsgleichung und ist die differentielle Form der Ladungserhaltung. Wenn wir magnetostatische Phänomene betrachten, gibt es keine zeitlichen Veränderungen, so dass wir die Zeitableitung in der Kontinuitätsgleichung zu Null setzen können. Wir erhalten für stationäre Stromdichten die Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (8.12)$$

die besagt, dass Stromlinien (Drähte) nicht beginnen und nicht enden dürfen. Bei einem normalen Stromkreis beginnt die Leitung in der Batterie und endet dort auch wieder. In der Batterie ist aber auch kein stationärer Zustand, denn die Ladung in der Batterie nimmt mit der Zeit ab.

### 8.3 Kraft auf einen stromdurchflossenen Draht im Magnetfeld

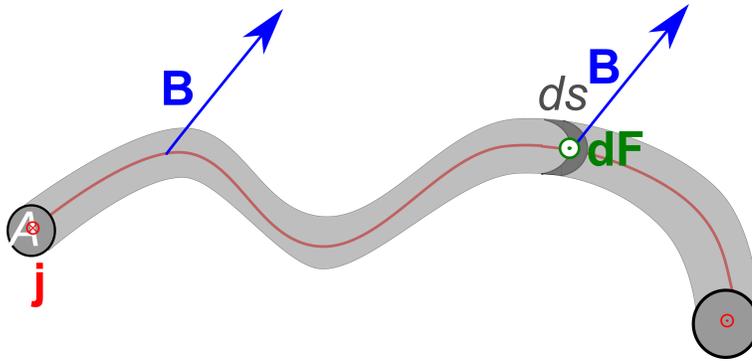


Abbildung 8.2: Kraft auf ein Drahtelement im Magnetfeld

Wir wollen die Kraft auf einen stromdurchflossenen Draht wie in Abbildung 8.2 dargestellt in einem Magnetfeld berechnen. Dazu müssen wir die Lorentzkraftdichte über das Volumen des Drahtes integrieren, wobei wir den Draht in kleine Volumenelemente mit Querschnittselement  $dA$  und Wegelemente  $ds$  längs der Stromlinien im Draht zerlegen. Wir finden

$$\mathbf{F} = \int d^3\mathbf{r}(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \int (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) d^2 A ds. \quad (8.13)$$

Alle Stromlinien die durch die Eintrittsfläche  $A_1$  hinein fließen, fließen durch die Austrittsfläche  $A_2$  wieder hinaus, denn durch die Draht/Isolations-Grenzfläche kann keine Ladung abfließen. Wir definieren deshalb den Strom

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{j} d^2 A \quad (8.14)$$

die Kraft auf ein Wegelement des Drahtes ist dann

$$d\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B} ds. \quad (8.15)$$

Wir können die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter in einem einfachen Experiment überprüfen, in dem wir eine Leiterschleife in einen Hufeisenmagneten einführen und messen um welchen

Winkel die Leiterschleife ausgelenkt wird wenn wir den Strom in die eine oder entgegengesetzte Richtung durch den Draht der Leiterschleife fließen lassen. Auf dem E-learning Server finden Sie einen entsprechenden Videoclip zu diesem Experiment.

### 8.4 Magnetische Flussdichte eines stromdurchflossenen Leiters

In der Physik gilt im Gleichgewicht, dass jede Kraft eine Gegenkraft hervorruft. Eine Kraft von einem Magneten auf einen stromdurchflossenen Draht, muss eine Gegenkraft des Drahtes auf den Magneten hervorgerufen. Da beide sich nicht berühren tritt wieder das elektromagnetische Feld als Vermittler dieser Kraft auf. Wir wollen deshalb das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters berechnen. Wir benutzen hierzu die Maxwell-Gleichungen der Magnetostatik:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{8.16}$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} / \epsilon_0 \tag{8.17}$$

und

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{8.18}$$

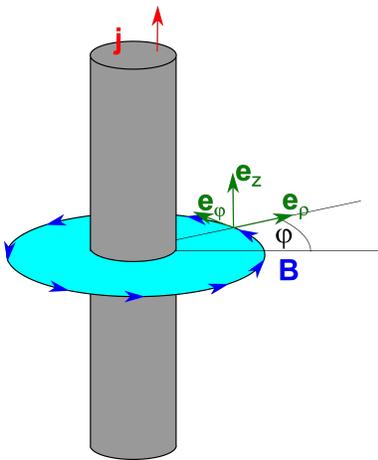


Abbildung 8.3: Berechnung der magnetischen Flussdichte eines Drahtes

Für eine unendlich dünnen Draht entlang der z-Richtung, wie in Abbildung 8.3 dargestellt finden wir die magnetische Induktion durch Integration der inhomogenen Maxwellgleichung 8.17 über eine senkrecht zum Draht konzentrisch liegende Kreisfläche. Wir benutzen den Satz von Stokes und nutzen die Zylindersymmetrie des Problems aus. Wir finden

$$I_z / \epsilon_0 c^2 \stackrel{8.14}{=} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_z / \epsilon_0 c^2 d^2 A \stackrel{8.17}{=} \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_z d^2 A \stackrel{Stokes}{=} \oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \stackrel{Symmetrie}{=} 2\pi \rho B_\phi \tag{8.19}$$

Wir lösen nach der magnetischen Induktion  $B_\phi$  auf, und erhalten die magnetische Induktion eines stromdurchflossenen Drahtes

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I_z}{\rho} \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\mathbf{I} \times \mathbf{e}_\rho}{\rho} \quad (8.20)$$

## 8.5 Magnetische Flussdichte einer stromdurchflossenen Spule

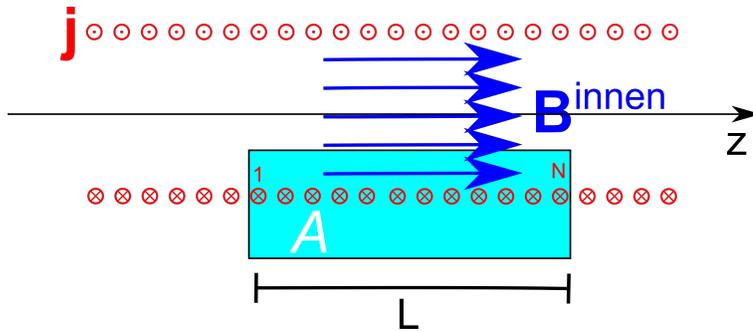


Abbildung 8.4: Berechnung der magnetischen Flussdichte einer Spule

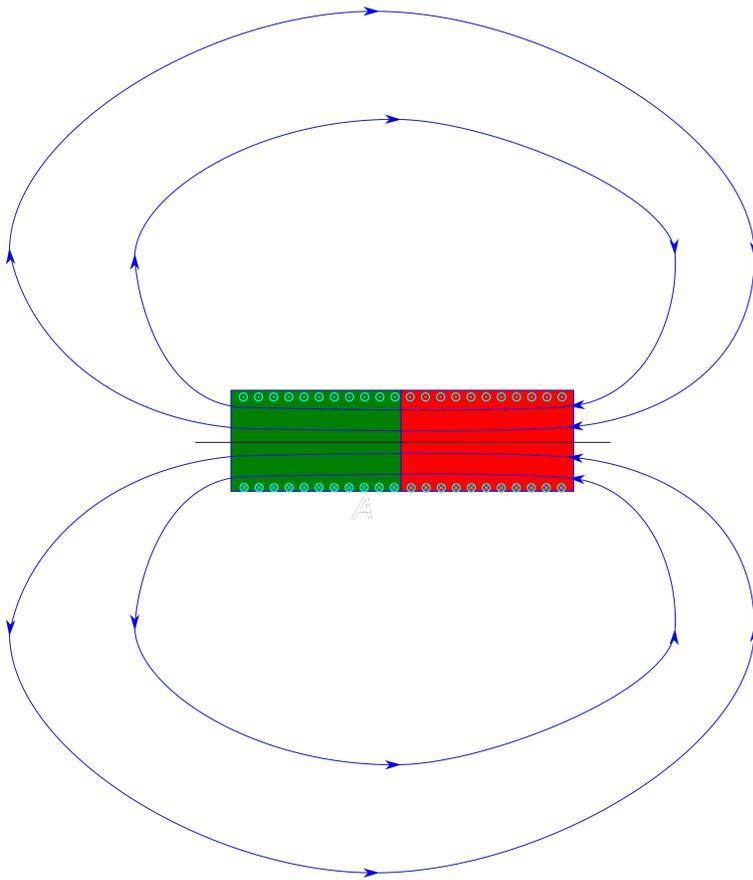
Die magnetische Flussdichte einer stromdurchflossenen Spule erhalten mit einer ähnlichen Vorgehensweise. Eine Spule ist ein aufgewickelter Draht. Wir stellen uns den Draht zunächst entlang der  $z$ -Richtung unaufgewickelt vor, wie im vorigen Abschnitt, wickeln diesen dann aber auf die Mantelfläche eines konzentrisch ausgerichteten Zylinders auf, so dass pro Länge  $L$  des Zylinders  $N$  Windungen des Drahtes um die  $z$ -Achse zu liegen kommen. Das Aufwickeln des Drahtes verändert den in  $z$ -Richtung fließenden Strom  $I_z$  nicht gegenüber der voll gestreckten Situation des vorherigen Abschnittes. Außerhalb der Spule erwarten wir deshalb weiterhin eine azimuthale Flussdichte, wie in Gleichung 8.20. Im gewickelten Teil der Spule fließt der Strom hauptsächlich in azimuthale Richtung und wir wollen den Strom in  $z$ -Richtung vernachlässigen. Das Aufwickeln bewirkt eine Flussdichte die zum Hauptteil durch das Innere der Spule und aus Symmetriegründen in  $z$ -Richtung fließt. Wir schneiden aus einer durch die  $z$ -Achse verlaufende Ebene eine rechtwinklige Fläche der Länge  $L$  heraus (Abbildung 8.4), die teilweise im Inneren und Äußeren der Spule liegt. Wir finden:

$$I_\phi^{\text{Fläche}} / \epsilon_0 c^2 = N I_\phi^{\text{Draht}} / \epsilon_0 c^2 \stackrel{8.14}{=} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_\phi / \epsilon_0 c^2 d^2 A \stackrel{8.17}{=} \int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\phi d^2 A$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \stackrel{\text{Symmetrie}}{=} L B_z^{\text{innen}}. \quad (8.21)$$

Wir definieren die Wicklungsdichte  $n = N/L$  der Spule, so dass die homogene Flussdichte im Inneren einer Spule als

$$\mathbf{B}_{\text{innen}} = - \frac{n \mathbf{I}^{\text{Draht}} \times \mathbf{e}_\rho}{\epsilon_0 c^2} \quad (8.22)$$



**Abbildung 8.5:** Die magnetische Flussdichte einer Spule ist identisch der magnetischen Flussdichte eines zylindrischen Permanentmagneten

geschrieben werden kann.

Gleichung 8.22 gilt nur im Inneren der Spule. An den Enden der Spule können die Feldlinien der Flussdichte nicht aufhören und treten aus der Spule aus, führen im Außenbereich zurück zum anderen Ende der Spule, wo sie wieder in die Spule eintreten (Abbildung 8.5). Die Feldlinien im Außenbereich einer stromdurchflossenen Spule sind identisch mit den Feldlinien der Flussdichte eines zylinderförmigen Stabmagneten. Auch im Stabmagneten muss das  $\mathbf{B}$ -Feld von Strömen gemacht werden. Im Stabmagneten werden die Ströme durch den Elektronenspin (Abbildung 8.6) erzeugt. Elektronen können aufgrund der Unschärferelation  $\Delta \mathbf{S} \cdot \Delta \phi > \hbar$  nicht einen verschwindenden Drehimpuls  $\mathbf{S} = \mathbf{0}$  haben. Sie drehen sich deshalb immer und haben einen Spin, der den Magnetismus erzeugt. Der Magnetismus von Stabmagneten ist aus diesem Grund ein quantenmechanisches Phänomen.

Wir können die Feldlinien der magnetischen Flussdichte mittels Eisenspänen sichtbar machen, die sich in  $\mathbf{B}$ -Feld ausrichten. Thomas Dabisch hat ein paar Aufnahmen von Flussdichten verschiedener Leiteranordnungen und Permanentmagneten dieser Vorlesung beigefügt (Abbildungen 8.7-8.10).

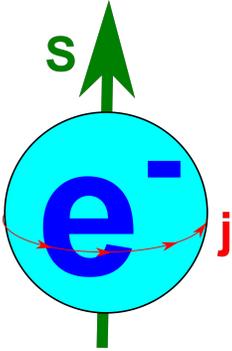


Abbildung 8.6: Der Elektronenspin ist für den Magnetismus verantwortlich

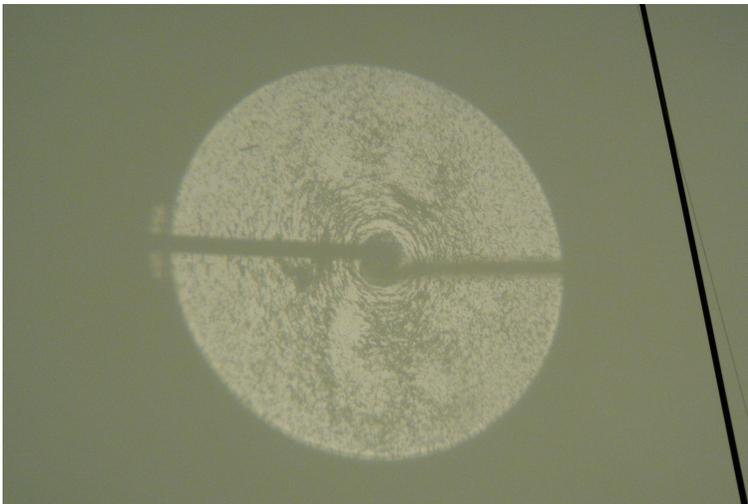
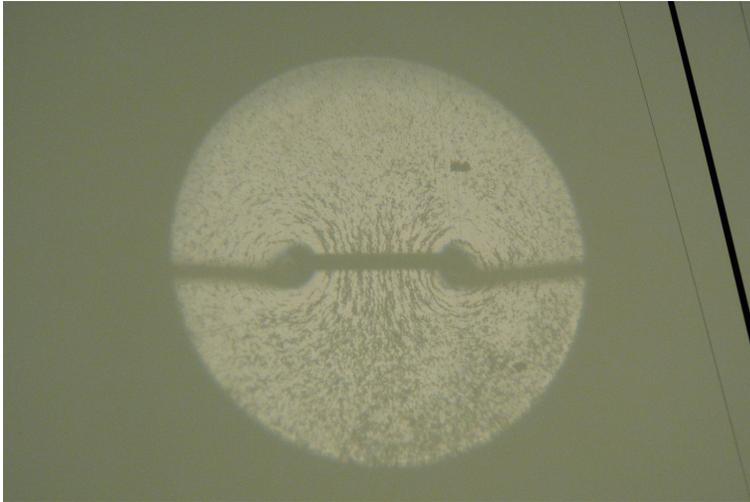
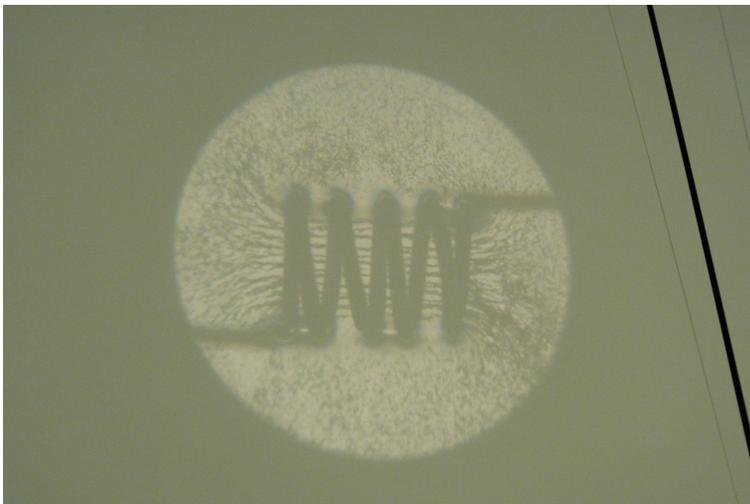


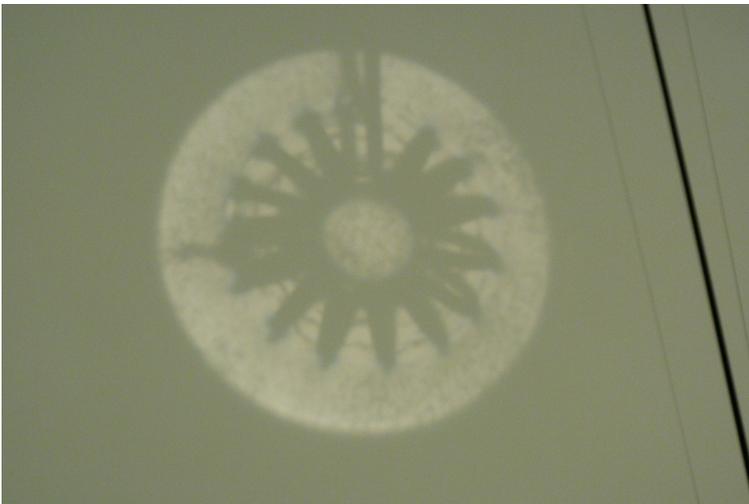
Abbildung 8.7: Feldlinien eines stromdurchflossenen Drahtes



**Abbildung 8.8:** Feldlinien einer stromdurchflossenen Windung



**Abbildung 8.9:** Feldlinien einer stromdurchflossenen Spule.



**Abbildung 8.10:** Feldlinien einer stromdurchflossenen toroidalen Spule

## 8.6 Übungen

### 8.6.1 Magnetische Flussdichte einer stromdurchflossenen Spule

In der Vorlesung hatten wir die Stromdichte einer Spule mit Radius  $R$  und Wickeldichte  $n$  durch

$$\mathbf{j} = nI_{\text{Draht}}\delta(\rho - R)\mathbf{e}_\phi$$

mit einer nur azimuthal fließenden Stromdichte genähert. Wie sieht die magnetische Flussdichte einer Spule mit Stromdichte

$$\mathbf{j} = nI_{\text{Draht}}\delta(\rho - R)(\cos\alpha\mathbf{e}_\phi + \sin\alpha\mathbf{e}_z)$$

im Innen- und Außenraum aus, bei der die helikale Wicklung der Spule durch den Wickelwinkel  $\alpha$  berücksichtigt ist? Weit weg von der Spule verlaufe der Draht auf der  $z$ -Achse. Vergleichen Sie dessen Flussdichte mit dem Außenfeld der Spule. Berechnen Sie die Kraft pro Länge für einen Draht der im Außenraum im Abstand  $R_2 > R$  von der Spule parallel zur Spulenachse verläuft.

### 8.6.2 Experiment: Smart Phone im Faraday Käfig

Legen Sie ein Mobiltelefon (Vibrationsalarm) in einen Metalltopf und schließen Sie den Deckel. Rufen Sie das Telefon an. Wirkt der Topf als Faraday'scher Käfig? Was passiert, wenn Sie einen Papierstreifen, oder ein Streichholz zwischen Topf und Deckel stecken? Verwenden Sie an Stelle eines Topfes eine Verpackung aus Aluminiumfolie.

### 8.6.3 Programmierung: Virtueller Spiegeldipol

Eine Punktdipol

$$\mathbf{p} = p\frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z}{\sqrt{2}}$$

vom Betrag 1 Debye befindet sich im Abstand  $a = 5\text{ cm}$  vor einer unendlich ausgedehnten Metallplatte in der  $z = 0$ -Ebene und erzeugt dort interne Ladungen. Die Verteilung der elektrischen Feldlinien dieser Anordnung entspricht exakt derjenigen Verteilung, die sich ergibt, wenn man die interne Ladung auf der Metalloberfläche durch eine spiegelbildlich hinter der Plattenoberfläche angeordneten Dipol

$$\mathbf{p}' = p\frac{-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z}{\sqrt{2}}$$

ersetzt.

- Unter welchem Winkel schneiden die Feldlinien die Metallplatte?
- Berechnen Sie das elektrische Feld an der Oberfläche der Metallplatte. Hinweis: Benutzen Sie den oben angedeuteten Spiegeldipol.
- Welche Kraft wirkt auf den Dipol?
- Plotten Sie das Vektorfeld des elektrischen Dipols vor der Metallplatte.
- Skizzieren Sie den Verlauf der Feldlinien.



## Kapitel 9

# Lorentztransformation eines Magnetfeldes

In dieser Vorlesung transformieren wir die Lorentzkraft mit Hilfe einer Lorentztransformation in eine Coulombkraft. Wir führen das Vektorpotenzial ein und betrachten wichtige symmetrische Lösungen der Magnetostatik. Das Vektorpotenzial hat endliche Werte in Regionen, in denen die Flussdichte verschwindet. Das elementare Flussdichtenfeld ist das eines magnetischen Dipols.

## 9.1 Lorentzkraft auf ein Mitläuferelektron

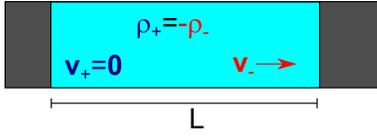


Abbildung 9.1: Ein ungeladener Draht, in dem Elektronen fließen und Atomrümpfe ruhen

Wir betrachten einen stromdurchflossenen Leiter nochmals etwas detaillierter: Der Leiter besteht im Ruhesystem der Atomrümpfe  $\mathcal{S}$  aus unbeweglichen positiv geladenen Atomrümpfen der Ladungsdichte  $\rho_+$  und negative geladenen beweglichen Elektronen der Ladungsdichte  $\rho_-$ . Insgesamt ist der Draht ungeladen ( $\rho_+ + \rho_- = 0$ ). Die Stromdichte im Draht wird durch die Elektronen gemacht  $\mathbf{j} = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_- = \rho_- \mathbf{v}_-$ , denn die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_+ = \mathbf{0}$  der Atomrümpfe verschwindet (Abbildung 9.1). Da der Draht ungeladen ist  $\rho_{ges} = 0$ , erzeugt er kein elektrisches Feld. Da jedoch Strom fließt erzeugt der Draht ein  $\mathbf{B}$ -Feld

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I_z}{\rho} \mathbf{e}_\phi. \quad (9.1)$$

Wir betrachten die Lorentzkraft auf eine Mitläuferelektron im Abstand  $\rho$  vom Draht, welches parallel zum Draht mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_- = v_- \mathbf{e}_z$  mit den Drahtelektronen mitfliegt. Das Mitläuferelektron spürt von den Drahtelektronen der Teilchendichte  $n_-$  eine Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = (-e)\mathbf{v}_- \times \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2An_- e^2 v_-^2}{\rho c^2} \mathbf{e}_\rho, \quad (9.2)$$

die das Mitläuferelektron in Richtung Draht drückt. Das Mitläuferelektron wird auf den stromführenden Draht zu beschleunigt. Scheinbar ziehen sich Elektronen gegenseitig an !? Dass das nur scheinbar richtig ist (wir haben die positiven Atomrümpfe außer Acht gelassen), sehen wir, wenn wir dasselbe Phänomen aus dem Ruhesystem der Elektronen betrachten.

## 9.2 Lorentztransformierte Erklärung

Wir nehmen ein Drahtstück der Länge  $L$  des zuvor betrachteten Drahtes und Lorentz-transformieren dieses Drahtstück ins Ruhesystem der Elektronen  $\mathcal{S}'$ . Beachten Sie, dass die Länge  $L$  eine Ruhelänge der Atomrümpfe, nicht aber Ruhelänge der Elektronen ist, die sich ja im alten System bewegt haben. Die Länge der Box, in der sich die Elektronen im Ursprungssystem befanden war gegenüber der Ruhelänge  $L'_-$  der Elektronen im neuen Ruhesystem Lorentzkontrahiert. Die Transformation ins Elektronen-Ruhesystem hebt diese Lorentzkontraktion auf, die Elektronen befinden sich im neuen System in einer größeren Box und haben deshalb im neuen System  $\mathcal{S}'$  eine geringere Dichte  $\rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}$ . In  $\mathcal{S}$  befinden sich in der selben Box ruhende Atomrümpfe. Die sich in der Box befindenden Atomrümpfe befinden sich nach Lorentztransformation in einer anderen, nämlich Lorentzkontrahierten Box, womit die neue Ladungsdichte der Atome  $\rho'_+ = \rho_+ / \sqrt{1 - v^2/c^2}$  beträgt. Die Ladungsdichte der Atomrümpfe im System  $\mathcal{S}'$  ist höher als in System  $\mathcal{S}$ . Sie mögen fragen, wie es sein kann, dass die gleiche Box *gleichzeitig* in zwei verschiedene Boxen im neuen System transformiert werden kann. Die Antwort auf diese Frage ruht in der Relativität von Gleichzeitigkeit zweier

an verschiedenen Stellen auftretender Ereignisse. Wenn wir die Ladungsdichten der Atomrümpfe und Elektronen im neuen System addieren erhalten wir die Gesamtladungsdichte des Drahtes in  $\mathcal{S}'$ :

$$\rho'_{ges} = \rho'_+ + \rho'_- = \rho_+/\sqrt{1-v^2/c^2} + \rho_-\sqrt{1-v^2/c^2} = \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (9.3)$$

Der Draht ist im Ruhesystem der Elektronen positiv geladen. Das Mitläuferelektron ist im System  $\mathcal{S}'$  in Ruhe und spürt keine Magnetfelder. Es spürt das elektrische Feld

$$\mathbf{E}' = \frac{\rho'_{ges} A}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{e}_\rho = \frac{\rho_+ A}{2\pi\epsilon_0\rho\sqrt{1-v^2/c^2}} \mathbf{e}_\rho. \quad (9.4)$$

Die Kraft auf das Mitläuferelektron ist dann die attraktive Kraft

$$\mathbf{F}' = -e\mathbf{E}' = -\frac{e\rho'_{ges} A}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{e}_\rho = -\frac{n_- e^2 A}{2\pi\epsilon_0\rho\sqrt{1-v^2/c^2}} \mathbf{e}_\rho = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (9.5)$$

senkrecht zur Bewegungsrichtung der Atomrümpfe. Letztere Beziehung zwischen den Kräften in beiden Systemen ist die korrekte Lorentztransformation einer transversalen Kraft.

### 9.3 Bemerkungen

Beachten Sie dass das Skalarprodukt des Vierervektors  $(\rho_{ges}^2 c^2 - \mathbf{j}^2)$  eine relativistische Invariante ist und deshalb in jedem System den gleichen Wert hat. Im Ruhesystem der Atomrümpfe ist der Draht ungeladen und führt einen Strom  $(\rho_{ges}^2 c^2 - \mathbf{j}^2) = -j^2 < 0$ . Der Draht ist stromartig und bleibt dies auch im System  $\mathcal{S}'$ , denn der Strom fließt im System  $\mathcal{S}'$  weiterhin in  $\mathbf{v}_+$  Richtung, nur stärker als im System  $\mathcal{S}$ , da gelten muss:  $(\rho_{ges}^2 c^2 - \mathbf{j}'^2) = -j^2 = -j^2$ . Man kann einen Strom in einem ungeladenen System nicht Lorentz-wegtransformieren. Genauso wenig gelingt es eine statische Ladungsverteilung in eine ungeladenen Ladungsverteilung Lorentz- zu transformieren.

### 9.4 Direkte Lorentztransformation

Die Ladungsdichte  $\rho$  und die Stromdichte  $\mathbf{j}$  bilden zusammen einen Vierervektor, der im System  $\mathcal{S}$

$$\begin{pmatrix} \rho c \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ j_x \mathbf{e}_x \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

beträgt. Wir erhalten den Vierervektor im System  $\mathcal{S}'$  durch direkte Lorentztransformation

$$\begin{pmatrix} \rho' c \\ \mathbf{j}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \beta & \sinh \beta & 0 & 0 \\ \sinh \beta & \cosh \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ j_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = j_x \begin{pmatrix} \sinh \beta \\ \cosh \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

$$= j_x \frac{\cosh \beta}{\sqrt{\cosh^2 \beta - \sinh^2 \beta}} \begin{pmatrix} \tanh \beta \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = j_x \begin{pmatrix} \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.8)$$

wobei  $\tanh \beta = v/c$  die auf die Lichtgeschwindigkeit normierte Transformationsgeschwindigkeit ist. Gleichung 9.8 ist das selbe Resultat wie Gleichung 9.3.

## 9.5 Das Vektorpotenzial

Wir erinnern an Vorlesung 3, in der wir an Stelle des elektrischen Feldes alternativ das elektrostatische Potenzial zur Beschreibung benutzt haben. Dieses hatte den Vorteil, dass die homogene elektrostatische Maxwellgleichung automatisch gelöst war und die inhomogene Maxwellgleichung eine skalare Differentialgleichung 2. Ordnung, die Poisson-Gleichung wurde. Die relativistische Erweiterung dieses Tricks ergänzt das elektrostatische Potenzial  $\phi$  um das Vektorpotenzial  $\mathbf{A}$ , das dann die homogene magnetostatische Maxwellgleichung automatisch löst. Wir wiederholen die magnetostatischen Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}/\epsilon_0 c^2. \quad (9.10)$$

Schreiben wir das Magnetfeld als

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (9.11)$$

geben  $\mathbf{A}$  den Namen Vektorpotenzial, so ist die homogene magnetostatische Maxwellgleichung automatisch erfüllt, da aus mathematischen Gründen die Divergenz der Rotation einer beliebigen Funktion verschwindet also

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (9.12)$$

für alle  $\mathbf{A}$ . Wir setzen die Definition des Vektorpotenzials Gleichung 9.11 in die inhomogene magnetostatische Maxwellgleichung ein und erhalten

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{j}/\epsilon_0 c^2 \quad (9.13)$$

Haben wir ein Vektorpotenzial  $\mathbf{A}$  gefunden, welches Gleichung 9.13 löst, so können wir auch ein umgezeichnetes Vektorpotenzial

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi \quad (9.14)$$

benutzen, denn

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \cancel{\nabla \times \nabla \chi} = \mathbf{B}, \quad (9.15)$$

so dass sowohl  $\mathbf{A}$  als auch  $\mathbf{A}'$  dieselbe Flussdichte  $\mathbf{B}$  beschreiben.  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}'$  beschreiben damit dieselbe Physik und  $\chi$  ist beliebig wählbar.

Wir betrachten die Divergenz des umgezeichneten Vektorpotenzials

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \chi \quad (9.16)$$

Wir könne  $\chi$  so wählen, dass  $\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0$  gilt, was gleichbedeutend zu  $\nabla^2 \chi = -\nabla \cdot \mathbf{A}$  ist. Wir können also  $\mathbf{A}$  so wählen, dass  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  gilt, und nennen  $\mathbf{A}$  dann ein Coulomb-geeichtes Vektorpotenzial. Für ein Coulomb-geeichtes Vektorpotenzial vereinfacht sich Gleichung 9.13 zu

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{j}/\epsilon_0 c^2. \quad (9.17)$$

Diese Gleichung sieht aus wie die Poissongleichung

$$-\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0. \quad (9.18)$$

Wenn wir das elektrostatische und das Vektorpotenzial zu einem Vierervektorpotenzial

$$\mathbf{A}_{Vierer} = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

kombinieren und die Stromdichte zu

$$\mathbf{j}_{Vierer} = \begin{pmatrix} \rho c \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

zusammenfügen, schreiben sich beide Gleichungen zusammen als

$$-\nabla^2 \mathbf{A}_{Vierer} = \mathbf{j}_{Vierer}/\epsilon_0 c^2. \quad (9.21)$$

## 9.6 Vektorpotenziale symmetrischer Stromanordnungen

Wir haben für das elektrostatische Potenzial einer Ladungsverteilung den Ausdruck

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (9.22)$$

gefunden und finden deshalb sofort den Ausdruck

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (9.23)$$

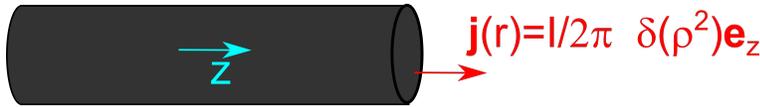


Abbildung 9.2: Ein stromdurchflossener Draht

für das Vektorpotenzial einer Stromanordnung. Wir berechnen das Vektorpotenzial eines unendlich langen dünnen Drahtes (Abbildung 9.2) entlang der  $z$ -Achse mit Stromdichte  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \frac{I}{2\pi} \delta(\rho'^2) \mathbf{e}_z$  und finden

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I\mathbf{e}_z}{8\pi^2\epsilon_0 c^2} \int \frac{d\phi' d(\rho'^2) dz' \delta(\rho'^2)}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2}} + \nabla\chi \quad (9.24)$$

$$\stackrel{\text{Divergente Terme wegeichen mit } \chi}{=} \frac{I\mathbf{e}_z}{8\pi^2\epsilon_0 c^2} \int_z^\infty \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} + \nabla\chi \quad (9.25)$$

$$= \frac{I\mathbf{e}_z}{2\pi\epsilon_0 c^2} \quad (9.26)$$

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} \left[ \ln \left( |z - z'| + \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} \right) \Big|_{z'=z}^{z'=Z} - \partial_z |z - Z| (\ln(2|z - Z|) - 1) \right] \\ = -\frac{I\mathbf{e}_z}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \rho. \quad (9.27)$$

Wir benutzen Gleichung 9.11 und finden die magnetische Flussdichte

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z \\ -\partial_x A_z \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{e}_\phi}{\rho} \quad (9.28)$$

eines stromdurchflossenen Leiters wieder, die wir bereits in der vorhergehenden Vorlesung 8 berechnet haben. Für die magnetische Flussdichte einer Spule hatten wir den Ausdruck

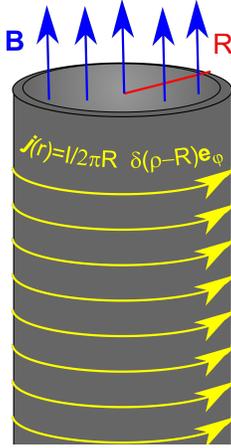


Abbildung 9.3: Eine stromumflossene Spule

$$\mathbf{B} = B^{innen} \mathbf{e}_z \Theta(R - \rho) \quad (9.29)$$

gefunden ( $\Theta(x)$  bezeichnet die Heavyside Sprungfunktion). Die Spule hatte nur im Inneren eine nicht verschwindende homogene Flussdichte. Wir integrieren das Magnetfeld über die in Abbildung 9.4 gezeigte Kreisfläche und finden

$$\int \mathbf{B} \cdot d^2\mathbf{S} = \int \nabla \times \mathbf{A} \cdot d^2\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (9.30)$$

Liegt die Fläche außerhalb der Spule ( $\rho > R$ ) so finden wir

$$\pi R^2 B^{innen} = 2\pi\rho A_\phi, \quad (9.31)$$

bzw.

$$A_\phi = \frac{R^2 B^{innen}}{2\rho}, \quad (9.32)$$

Liegt die Fläche innerhalb der Spule ( $\rho < R$ ) so finden wir

$$\pi\rho^2 B^{innen} = 2\pi\rho A_\phi, \quad (9.33)$$

bzw.

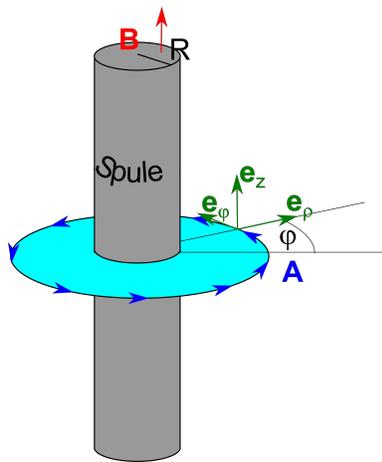


Abbildung 9.4: Berechnung des Vektorpotenzials einer Spule

$$A_\phi = \frac{B^{innen}}{2} \rho, \tag{9.34}$$

Das Vektorpotenzial einer Spule beträgt also

$$\mathbf{A} = \frac{B^{innen}}{2} \frac{\rho_{<}}{\rho_{>}} \mathbf{e}_\phi, \tag{9.35}$$

wobei  $\rho_{<} = \min(\rho, R)$  und  $\rho_{>} = \max(\rho, R)$  den kleineren bzw. größeren Wert des Paares  $\rho$  und  $R$  bezeichnet. Beachten Sie bitte, dass das  $\mathbf{A}$ -Feld außerhalb der Spule im Gegensatz zur Flussdichte  $\mathbf{B}$  nicht verschwindet (Abbildung 9.5).

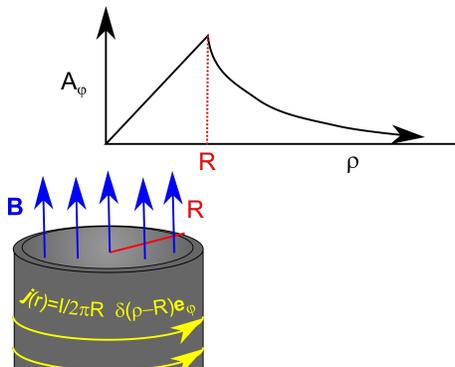


Abbildung 9.5: Das Vektorpotenzial außerhalb der Spule verschwindet nicht, obwohl die Flussdichte dort verschwindet

## 9.7 Fernfeld eines Ringstromes

Wir betrachten einen Ringstrom

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = I\delta(z)\delta(\rho - R)\mathbf{e}_\phi, \quad (9.36)$$

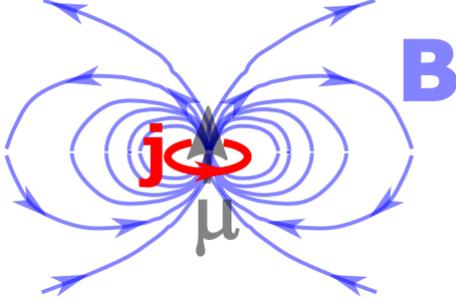


Abbildung 9.6: Ein Ringstrom mit Radius  $R$

wie in Abbildung 9.6 abgebildet. Das Vektorpotenzial des Ringstromes ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{d\phi' \rho' d\rho' dz' \delta(z') \delta(\rho' - R) \begin{pmatrix} -\sin \phi' \\ \cos \phi' \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2}} \quad (9.37)$$

$$= \frac{RI}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi' \begin{pmatrix} -\sin \phi' \\ \cos \phi' \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos(\phi - \phi') + z^2}} \quad (9.38)$$

Obwohl der Radius  $R$  des Ringstromes mit einem Großbuchstaben abgekürzt ist, interessieren wir uns für das Vektorpotenzial bei Abständen  $\rho \gg R$  und entwickeln das Integral Gleichung 9.38 in eine Taylorreihe nach  $R$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_0^{2\pi} d\phi' \begin{pmatrix} -\sin \phi' \\ \cos \phi' \\ 0 \end{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \left( 1 + \frac{\rho R \cos(\phi - \phi')}{\rho^2 + z^2} \right) \quad (9.39)$$

$$\stackrel{r^2 = \rho^2 + z^2}{=} \frac{IR^2 \rho}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \int_0^{2\pi} d\phi' \begin{pmatrix} -\sin \phi' \\ \cos \phi' \\ 0 \end{pmatrix} (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') \quad (9.40)$$

$$= \frac{IR^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \int_0^{2\pi} \rho d\phi' \begin{pmatrix} -\sin^2 \phi' \sin \phi \\ \cos^2 \phi' \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.41)$$

$$= \frac{I\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \rho \mathbf{e}_\phi \quad (9.42)$$

Das Integral im führenden Term verschwindet in Gleichung 9.39, da die Stammfunktion des Cosinus und Sinus wieder periodische Funktionen sind. Wir definieren das magnetische Moment des Ringstromes

$$\boldsymbol{\mu} = \pi R^2 I \mathbf{e}_z = I A \mathbf{e}_z, \quad (9.43)$$

wobei  $A = \pi R^2$  die umflossene Fläche des Ringstromes ist, benutzen  $\mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\phi$  und finden so den Ausdruck

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} = -\frac{\boldsymbol{\mu} \times \nabla}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \quad (9.44)$$

Die zugehörige Flussdichte ist

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\nabla \times (\boldsymbol{\mu} \times \nabla)}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \quad (9.45)$$

$$= -\frac{\boldsymbol{\mu} \cdot (\nabla \nabla - \nabla^2 \mathbb{1})}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} \quad (9.46)$$

$$= -\frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot (3\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2 \mathbb{1})}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^5} \quad (9.47)$$

die eines dipolaren Feldes (vergleiche Vorlesung 4 und Abbildung 9.7). Die Stromdichte des magnetischen Dipols erhalten wir über

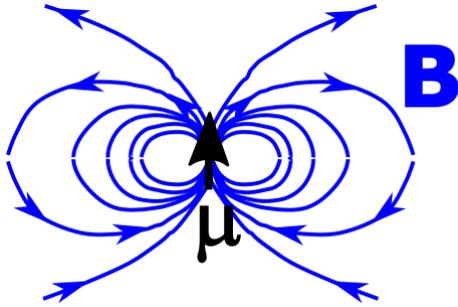
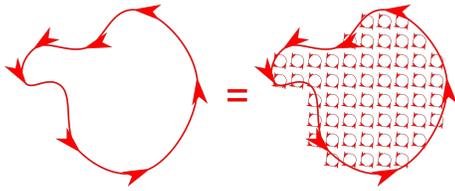


Abbildung 9.7: Flussdichte eines magnetischen Dipols bzw. Punktringstromes

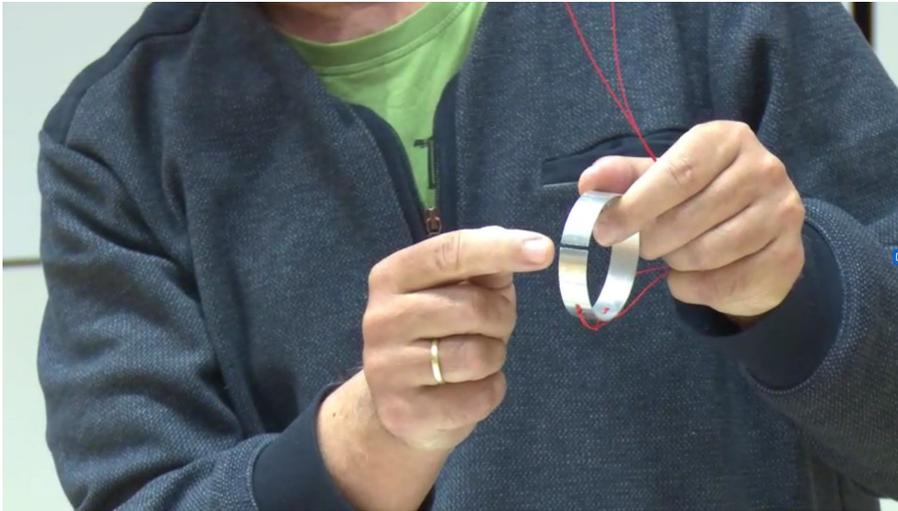
$$\mathbf{j} = -\epsilon_0 c^2 \nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\mu} \times \nabla \nabla^2 \left( -\frac{1}{4\pi r} \right) = -\boldsymbol{\mu} \times \nabla \delta^3(\mathbf{r}) \quad (9.48)$$

und sie ist die Stromdichte eines Punktringstromes. Ein Punktringstrom ist der kleinste magnetische Stromkreis der gleichzeitig ein stationärer Stromkreis ist und deshalb der Elementarbaustein der Magnetostatik. Wir können uns deshalb einen makroskopischen Stromkreis aufgebaut denken aus infinitesimalen Stromringen, so wie in Abbildung 9.8 dargestellt.



**Abbildung 9.8:** Ein makroskopischer Stromkreis kann durch infinitesimale Stromringe aufgebaut werden





## Kapitel 10

# Leiterschleifen und magnetische Dipole

In dieser Vorlesung berechnen wir die magnetische Flussdichte einer beliebig geformten Leiterschleife. Wir berechnen das Drehmoment, die Kraft und die mechanische Energie eines Dipols im externen magnetischen Flussdichtefeld. Da die Lorentzkraft senkrecht zur Geschwindigkeit steht verschwindet die Gesamtenergie der Materie eines Dipols und die Energie wird nicht in der Materie, sondern im magnetischen Flussdichtefeld gespeichert. Die Quanten-Interferenzeffekte hängen nicht lokal mit dem Flussdichtefeld zusammen, lassen sich aber mit dem Vektorpotenzial durch lokale Wechselwirkungen ausdrücken.

## 10.1 Das Gesetz von Biot-Savart

In Vorlesung 9 haben wir das Vektorpotenzial einer Stromdichteverteilung

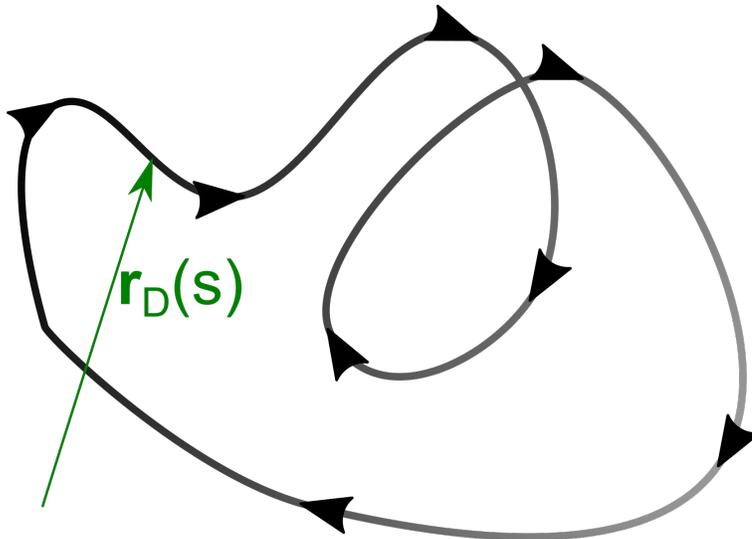
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad (10.1)$$

hergeleitet, wobei das Vektorpotenzial über  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  definiert war. Wir können damit die Flussdichte einer Stromdichteverteilung berechnen:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = - \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 c^2} \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad (10.2)$$

wobei es uns erlaubt ist den  $\nabla$ -Operator an der Stromdichte vorbeizuziehen, denn er differenziert nach ungestrichenen Koordinaten. Wir finden weiter

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}', \quad (10.3)$$



**Abbildung 10.1:** mit der Bogenlänge parametrisierte Leiterschleife

Wir betrachten eine unendlich dünne Leiterschleife wie in Abbildung 10.1 dargestellt, die als mit der Bogenlänge  $s$  parametrisierte Kurve  $\mathbf{r}_D(s)$  beschrieben sei. Fließt ein Strom  $I$  durch die Leiterschleife, so können wir die Stromdichte durch

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \int I \delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_D(s)) \frac{d\mathbf{r}_D(s)}{ds} ds \quad (10.4)$$

ausdrücken. Wir setzen Gleichung 10.4 in Gleichung 10.3 ein und erhalten das Gesetz von Biot und Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = - \int \frac{I (\mathbf{r} - \mathbf{r}_D(s)) \times \frac{d\mathbf{r}_D(s)}{ds}}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_D(s)|^3} ds, \quad (10.5)$$

welches die Berechnung der magnetische Induktion einer beliebigen Leiterkonformation erlaubt.

## 10.2 Drehmoment auf ein magnetisches Moment

Wir haben in Vorlesung 9 die Stromdichte eines magnetischen Punktdipols berechnet:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \times \nabla \delta^3(\mathbf{r}) \quad (10.6)$$

Wenn wir das magnetische Moment in ein externes (nicht von ihm selbst erzeugtes)  $\mathbf{B}^{ext}$ -Feld einbringen wirkt auf ihn die Lorentz-Kraftdichte

$$d\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}^{ext} d^3\mathbf{r} \quad (10.7)$$

$$= (-\boldsymbol{\mu} \times \nabla) \times \mathbf{B}^{ext} \delta^3(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (10.8)$$

sowie eine Drehmomentendichte

$$d\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (-\boldsymbol{\mu} \times \nabla) \times \mathbf{B}^{ext} \delta^3(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (10.9)$$

Das Drehmoment auf den magnetischen Dipol erhalten wir durch Abintegration der Drehmomentendichte über das Volumen

$$\boldsymbol{\tau} = \int \mathbf{r} \times (-\boldsymbol{\mu} \times \nabla) \times \mathbf{B}^{ext} \delta^3(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (10.10)$$

$$\stackrel{\text{partielle Integration}}{=} - \int \delta^3(\mathbf{r}) ((\boldsymbol{\mu} \times \nabla) \times \mathbf{B}^{ext}) \times \mathbf{r} d^3\mathbf{r} \quad (10.11)$$

$$= - \int \delta^3(\mathbf{r}) \left( \begin{array}{l} (\nabla \times \mathbf{r} = 0) \\ (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \nabla - (\mathbf{B}^{ext} \cdot \nabla) \boldsymbol{\mu} \end{array} \right) \times \mathbf{r} d^3\mathbf{r} \quad (10.12)$$

$$= \int \delta^3(\mathbf{r}) \boldsymbol{\mu} \times (\mathbf{B}^{ext} \cdot \nabla) \mathbf{r} d^3\mathbf{r} \quad (10.13)$$

$$= \int \delta^3(\mathbf{r}) \boldsymbol{\mu} \times (\mathbf{B}^{ext} \cdot \mathbf{1}) d^3\mathbf{r} \quad (10.14)$$

$$= \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}^{ext}, \quad (10.15)$$

und es wirkt deshalb ein Drehmoment  $\boldsymbol{\tau}$ , das versucht, das magnetische Moment parallel (nicht antiparallel) zur magnetischen Flussdichte zu drehen.

## 10.3 Mechanische Energie eines Dipols

Wenn wir das ausrichtende Drehmoment den magnetischen Dipol konstanten Betrags des magnetischen Moments mit der Kreisfrequenz  $\boldsymbol{\omega}$  drehen lassen, so dass

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu}, \quad (10.16)$$

dann ist die mechanische Leistung

$$-\frac{U_{mech}}{dt} = P_{mech} = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}^{ext}) \cdot \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{B}^{ext} = \frac{d(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}^{ext})}{dt} \quad (10.17)$$

und der Dipol ändert seine mechanische Energie um

$$\Delta U_{mech} = -\boldsymbol{\mu}_f \cdot \mathbf{B}^{ext} + \boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{B}^{ext}, \quad (10.18)$$

wobei wir mit  $\boldsymbol{\mu}_f$  das finale und mit  $\boldsymbol{\mu}_i$  das magnetische Moment zu Beginn der Drehung bezeichnen. Die mechanische Energie eines Dipols ist deshalb

$$U_{mech} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}^{ext}. \quad (10.19)$$

Das Energieminimum wird für eine Orientierung parallel zum Feld angenommen.

## 10.4 Kraft auf einen Dipol

Gleichung 10.19 beschreibt nur die mechanische Energie des Dipols. Der Dipol generiert jedoch das magnetische Feld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\boldsymbol{\mu} \cdot (3\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2\mathbb{1})}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^5}, \quad (10.20)$$

in welchem ebenfalls Energie gespeichert ist. Wir wollen diese Energie des Flussdichtenfeldes berechnen. Hierzu stellen wir uns zwei entgegengesetzte Dipole  $\boldsymbol{\mu}_1$  und  $\boldsymbol{\mu}_2$  an den Stellen  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  vor. Die Stromdichte beider Dipole beträgt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu}_1 \times \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - \boldsymbol{\mu}_2 \times \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) = -\boldsymbol{\mu}_1 \times \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) + \boldsymbol{\mu}_1 \times \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2). \quad (10.21)$$

Wir berechnen die Lorentz-Kraftdichte die das Feld

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = -\frac{\boldsymbol{\mu}_2 \cdot (3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) - (r - r_2)^2 \mathbb{1})}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^5}, \quad (10.22)$$

des Dipols  $\boldsymbol{\mu}_2$  auf den Dipol  $\boldsymbol{\mu}_1$  ausübt. Diese Lorentz-Kraftdichte ist

$$d\mathbf{F}_{12} = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_2 d^3\mathbf{r} \quad (10.23)$$

$$= \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) \times [(\boldsymbol{\mu}_1 \times \nabla) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)] d^3\mathbf{r} \quad (10.24)$$

Wir integrieren die Kraftdichte über die Leiterschleife und erhalten die Kraft

$$\mathbf{F}_{12} = \int \mathbf{B}_2(\mathbf{r}) \times [(\boldsymbol{\mu}_1 \times \nabla) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)] d^3\mathbf{r} \quad (10.25)$$

$$\stackrel{\text{partielle Integration}}{=} \int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) [(\boldsymbol{\mu}_1 \times \nabla) \times \mathbf{B}_2(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r} \quad (10.26)$$

$$= (\boldsymbol{\mu}_1 \times \nabla_1) \times \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) \quad (10.27)$$

$$\nabla_1(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1)) - \overbrace{\boldsymbol{\mu}_1 \cdot (\nabla_1 \times \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1))}^{\nabla \cdot \mathbf{B}=0} = -\nabla_1(-\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1)) \quad (10.28)$$

$$= -\nabla_1 U_{mech}. \quad (10.29)$$

Die Kraft ist, wie gewohnt der negative Gradient der mechanisch gespeicherten Energie und die Energie  $U_{mech}$  gibt sowohl die Orientierungsenergie als auch die potentielle Energie des Dipols im externen Magnetfeld an.

## 10.5 Energiedichte des **B**-Feldes

Die mechanische Energie des Dipols ist nicht die einzige in der Materie des Dipols gespeicherte Energie. Es kostet elektrische Energie  $U_{el}$  den Ringstrom aufzubauen. Zudem ist in der magnetischen Flussdichte Feldenergie  $U_B$  gespeichert. Wenn wir zwei entgegengesetzte Dipole  $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}/2 = -\boldsymbol{\mu}_2$  an der selben Stelle überlagern, haben wir in der Summe weder einen Ringstrom, noch eine magnetische Flussdichte und damit auch keine mechanische Energie. Die an der geladenen Materie angreifenden Kräfte in einem **B**-Feld sind Lorentzkräfte, die senkrecht zur Geschwindigkeit der Ladungen gerichtet sind. Damit verschwindet die Leistung der magnetischen Flussdichte an der Materie, denn

$$P_{Mat} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{Lorentz} = q\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) = 0. \quad (10.30)$$

Wenn wir den Dipol in einem externen  $\mathbf{B}^{ext}$ -Feld drehen oder in ein anderes externes  $\mathbf{B}^{ext}$ -Feld bewegen, muss deshalb die vom Dipol aufgenommene mechanische Energie aus der elektrischen Energie entnommen werden, nicht aus der Feldenergie. Wir drehen jetzt die beiden entgegengesetzten Dipole durch ein externes Drehmoment, welches das magnetische Drehmoment kompensiert, in eine parallele Position und verrichten dabei die Arbeit  $W = -2\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{B}_2 - 2\boldsymbol{\mu}_2 \cdot \mathbf{B}_1 = 2\boldsymbol{\mu}_1 \cdot 2\mathbf{B}_1$  an den beiden Dipolen im jeweils externen Feld des anderen. Diese externe Arbeit fließt nicht in die Energie der Dipole sondern in das **B**-Feld  $\mathbf{B} = 2\mathbf{B}_1$ , welches vom doppelt so großen Dipol  $\boldsymbol{\mu} = 2\boldsymbol{\mu}_1$  erzeugt wird. Die im Feld gespeicherte Energie eines Dipols ist deswegen  $U_B = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -U_{mech}$ , wobei  $\mathbf{B}$  die Flussdichte des **B**-Feldes am Ort des Dipols bezeichnet, unabhängig davon, wer dieses **B**-Feld erzeugt (wenn wir den Dipol  $\boldsymbol{\mu}$  aus einer Region ohne externes Feld in ein externes Feld einbringen erhöht sich die Feldenergie von  $U_B = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}^{int}$  auf  $U_B = \boldsymbol{\mu} \cdot [\mathbf{B}^{int} + \mathbf{B}^{ext}]$ ). Wird  $\mathbf{B}^{ext}$  von anderen Punktdipolen erzeugt so ist der Beitrag zur Feldenergie das magnetische Moment eines beliebig herausgegriffenen Punktdipols multipliziert mit der Summe der **B** Felder aller Dipole an diesem Ort. Es ist sinnvoller den Beitrag zur Feldenergie jedem Paar an Dipolen symmetrisch zuzuschreiben, so dass die Gesamtfeldenergie als

$$U_B = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{B}_j(\mathbf{r}_i) \quad (10.31)$$

geschrieben werden kann. Das magnetische Moment schreiben wir jetzt wieder als Integral des Stromes über die vom Strom umkreiste Fläche des Ringstroms.

$$\boldsymbol{\mu}_i = I_i \int_{A_i} \mathbf{n} dA_i \quad (10.32)$$

womit wir die Feldenergie umschreiben als

$$U_B = \frac{1}{2} \sum_i I_i \int_{A_i} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA_i \quad (10.33)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i I_i \int_{A_i} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dA_i \quad (10.34)$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{=} \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint_{\partial A_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}_i \quad (10.35)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i I_i \oint_{\text{Stromquerschnitt}_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} ds dA_{\text{Stromquerschnitt}_i} \quad (10.36)$$

$$= \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} d^3\mathbf{r} \quad (10.37)$$

$$= \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \nabla \times \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} d^3\mathbf{r} \quad (10.38)$$

$$\stackrel{\text{partielle Integration}}{=} \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} d^3\mathbf{r} - \int_{\partial V} \frac{\epsilon_0 c^2}{2} (\mathbf{n} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} d^2 A \quad (10.39)$$

$$= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int B^2 d^3 r. \quad (10.40)$$

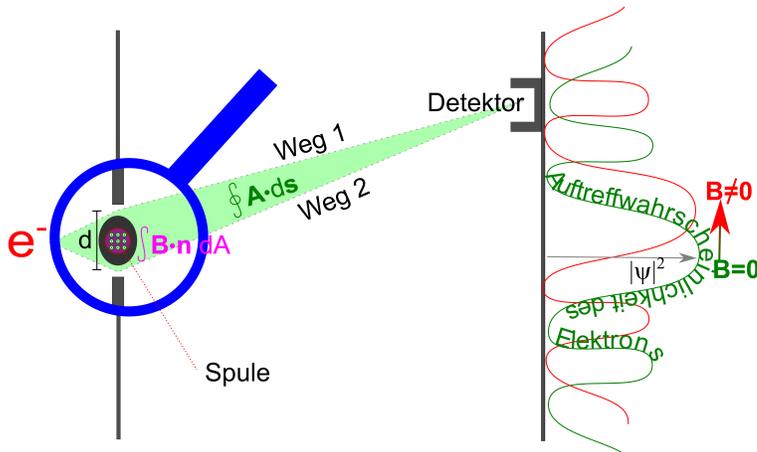
Wir finden so die magnetische Energiedichte

$$u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} B(\mathbf{r})^2. \quad (10.41)$$

Dies ist ein sehr ähnlicher Ausdruck im Vergleich zur elektrischen Energiedichte

$$u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} E(\mathbf{r})^2. \quad (10.42)$$

## 10.6 Lokale Wirkung des Feldes und Aharonov-Bohm-Effekt



**Abbildung 10.2:** Verschiebung des Interferenzmusters durch eine vergrabene Spule

Ein wesentliches Problem, das mit dem Feldbegriff umgangen wurde, war die Fernwirkung, die wir im Coulombgesetz zwischen zwei Ladungen hatten. Mit dem Feldbegriff wird von einer Ladung

eine elektromagnetisches Feld erzeugt, welches dann zur anderen Ladung propagiert und seine Kraftwirkung am Platz der anderen Ladung entwickelt nachdem es dort hin propagiert ist. Ursache und Wirkung finden instantan am selben Ort statt und nicht mehr über eine Distanz. Wir haben in der Magnetostatik die magnetische Flussdichte kennengelernt, die uns vielleicht sympathischer vorkommt, weil man bei ihr weiß woran man ist, während das Vektorpotenzial uneindeutig ist und umgekehrt werden kann. Man könnte deshalb zum Fehlschluss kommen, das Vektorpotenzial sei ein theoretischer aber kein physikalisch klarer Begriff. Experimente von Tonomura et al. zu Theorien von Aharonov und Bohm zur Elektronenbeugung zeigen aber, dass wir das Vektorpotenzial als das physikalischere Feld gegenüber der Flussdichte anzusehen haben. Das Experiment selbst ist ein quantenmechanisches Interferenz-Experiment mit Elektronen, die einem Welle-Teilchen-Dualismus unterliegen und an einem Doppelspalt als Wellen interferieren, so dass bei der Detektion vieler Elektronen an dem Spalt hinter dem Spalt ein Interferenzmuster der Auftreffwahrscheinlichkeit eines Elektrons mit Maxima und Minima entsteht. Die Interferenz ist ein Effekt der beiden möglichen Wege, die die Wahrscheinlichkeitsamplitude des Elektrons nehmen kann, durch Spalt 1 oder Spalt 2, jedenfalls kann die Wellenfunktion des Elektrons nicht in die Wände eindringen in denen die beiden Spalte platziert sind. Seltsamerweise ändert sich aber das Interferenzmuster der Elektronen, wenn wir eine magnetische Flussdichte einschließende Spule in der Wand so versenken (Abbildung 10.2), dass die Elektronen keinen Zugang zur Spule haben. Die Verschiebung des Interferenzmusters ist proportional zum Fluss

$$\phi = \int \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{nd}^2S = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{nd}^2S = \oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{ds} \quad (10.43)$$

durch die Spule, an dem die Elektronen nicht vorbeikommen. Wir können diesen Fluss ausdrücken über das Ringintegral des Vektorpotenzials entlang eines beliebigen Weges um die Spule herum, also auch entlang der beiden möglichen Wege des Elektrons. Beachten Sie, dass die magnetische Flussdichte entlang beider Wege des Elektrons verschwindet, während das Vektorpotenzial dort einen endlichen Wert hat. Das Ringintegral entlang dem Gradienten einer Eichfunktion verschwindet, so dass das Wegintegral nur eichunabhängige Effekte des Vektorpotenzials aufammelt. Wenn wir Fernwirkungen ablehnen müssen wir das Vektorpotenzial deshalb als das physikalischere Feld gegenüber der Flussdichte ansehen.

## 10.7 Übungen

### 10.7.1 Kompassnadel

Eine Magnethnadel in einem Kompass ist auf einer Achse senkrecht zu seinem magnetischen Moment  $\boldsymbol{\mu}$  gelagert und wird durch ein viskoses Drehmoment  $\boldsymbol{\tau}_{\text{viskos}} = C\boldsymbol{\omega}$  gedämpft, wobei die Konstante  $C$  als viskoser Rotationswiderstand bezeichnet wird. Berechnen Sie den Kompasswinkel als Funktion der Zeit wenn eine magnetische Flussdichte  $\boldsymbol{B}$  senkrecht zur Achse  $\boldsymbol{\omega}$  und senkrecht zum magnetischen Moment  $\boldsymbol{\mu}$  angelegt wird. Berechnen Sie auch den zeitabhängigen Winkel der Kompassnadel, wenn die magnetische Flussdichte selbst mit einer Frequenz  $\omega_B$  parallel zur Drehachse rotiert.

### 10.7.2 Experiment: Brechung des elektrischen Feldes

Arbeiten Sie ein Experiment aus, mit dem man die Brechung des elektrischen Feldes an einer Grenzfläche sichtbar machen könnte. Meine Idee ist die folgende: Konstruieren Sie einen Plattenkondensator und platzieren Sie einen rechtwinkligen Wassercontainer, wie in 10.3 dargestellt, unter 45 Grad in den Plattenkondensator. Schmeißen Sie ein Stück Brause ins Wasser und beobachten Sie, ob die Luftbläschen mit und ohne Feld unterschiedlich und in welche Richtung abgelenkt werden. Die Dielektrizitätskonstante von Wasser ist groß. Falls Sie bei dem Experiment keinen Effekt beobachten können, überlegen Sie sich wie man das Experiment abändern muss damit es besser funktioniert. Führen Sie auch dieses Experiment durch. Was kann man aus den Beobachtungen schließen?

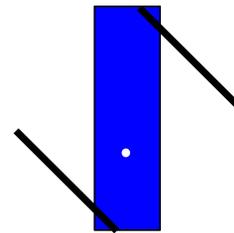


Abbildung 10.3: Gasblase in Wasser?  
Ansicht von oben.

### 10.7.3 Programmierung: Würfelkantenstrom

Ein Strom der Stärke  $I$  fließt entlang 6 Kanten eines Würfels und zwar von  $\mathbf{0}$  nach  $a\mathbf{e}_x$  nach  $a\mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y$  nach  $a\mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y + a\mathbf{e}_z$  nach  $a\mathbf{e}_y + a\mathbf{e}_z$  nach  $a\mathbf{e}_z$  nach  $\mathbf{0}$ . Berechnen Sie die magnetische Flussdichte mit dem Gesetz von Biot-Savart und plotten Sie das magnetische Flussdichtefeld im Inneren des Würfels. Welche Gestalt hat das magnetische Flussdichtefeld weit weg vom Würfel?





## Kapitel 11

# Magnetische Materialien

In dieser Vorlesung stellen wir die Gleichungen der Magnetostatik vor. Wir führen das magnetische Feld und die Magnetisierung als zwei Felder ein, die die magnetische Flussdichte aufbauen. Wir besprechen para- und dia- und ferromagnetische Materialien. Der Ferromagnetismus ist ein auf elektrostatische Wechselwirkungen basierender Quanteneffekt. Die Konkurrenz zwischen elektrostatischer Austauschwechselwirkung und magnetischer Dipolwechselwirkung bedingt die Organisation eines Ferromagneten in Weiss'sche Bezirke.

## 11.1 Magnetische Felder in Materie

Wir haben in der Elektrostatik einen phänomenologischen Weg zur Beschreibung des Verhaltens von Ladungen in Materie gewählt und wollen hier dem selben Prinzip folgen. Wir unterteilen die Stromdichte in zwei Klassen von Stromdichten: externe Stromdichten und interne Stromdichten.

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{ext} + \mathbf{j}_{int}. \quad (11.1)$$

Die externe Stromdichte ist eine Stromdichte, die wir als Experimentator unter Kontrolle haben, und die wir deshalb einstellen können, wie wir das im Experiment wollen. Die interne Stromdichte reagiert auf unsere externen Manipulationen mit eigenen, eben internen, Stromdichten, die sich aufgrund der speziellen Eigenschaften der Materie einstellen. Wir teilen die magnetische Flussdichte entsprechend auf:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\epsilon_0 c^2} + \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}, \quad (11.2)$$

so dass die Rotation der Flussdichte  $\mathbf{B}$  die Gesamtstromdichte beschreibt:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}, \quad (11.3)$$

die Rotation des Magnetfeldes  $\mathbf{H}$  die externe Stromdichte ist

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{ext}, \quad (11.4)$$

und die Rotation der Magnetisierung  $\mathbf{M}$  die interne Stromdichte ist

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_{int}. \quad (11.5)$$

Damit können wir die Gleichungen der Magnetostatik ausschließlich durch kontrollierbare Stromdichten  $\mathbf{j}_{ext}$  ausdrücken, und die Gleichungen der Magnetostatik in Materie lauten:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (11.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{ext}, \quad (11.7)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\epsilon_0 c^2} + \frac{\mathbf{M}}{\epsilon_0 c^2}. \quad (11.8)$$

Die Reaktion der internen Ströme beschreiben wir mit Hilfe einer konstituierenden Gleichung  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ , die davon abhängt, welches Material wir beschreiben.

## 11.2 Schwach magnetisierbare Materie

In Materialien, die schwach auf externe Magnetfelder reagieren ist die Reaktion, -die Magnetisierung-, eine lineare Funktion des externen Magnetfeldes:

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \chi \mathbf{H}. \quad (11.9)$$

Den Proportionalitätsfaktor  $\chi$  nennen wir die magnetische Suszeptibilität. Das Vorzeichen der Suszeptibilität bestimmt den Namen des magnetischen Materials: Materialien mit positiver magnetischer Suszeptibilität heißen Paramagnete. In Paramagneten ist die Magnetisierung parallel zum Magnetfeld. Materialien mit negativer magnetischer Suszeptibilität heißen Diamagnete. In Diamagneten ist die Magnetisierung antiparallel zum Magnetfeld. Im Vakuum gibt es keine internen Ströme und die magnetische Suszeptibilität  $\chi = 0$  verschwindet.

Ein schwach magnetisierbares Material  $I$  wird etwas interessanter, wenn wir es mit einem zweiten schwach magnetisierbarem Material  $II$  um die Flussdichte konkurrieren lassen. Aus den Maxwell-Gleichungen  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  und  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  an der Grenzfläche beider Materialien, an der wir in der Regel keine externen Stromdichten platziert haben, leiten wir analog zu der Vorgehensweise dielektrischer Materialien in der Elektrostatik, die Randbedingungen:

$$\mathbf{B}_I \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_{II} \cdot \mathbf{n} \quad (11.10)$$

und

$$\mathbf{H}_I \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_{II} \times \mathbf{n} \quad (11.11)$$

ab, wobei  $\mathbf{n}$  den Normalenvektor auf die Grenzfläche bezeichnet.

Wir betrachten eine schwach magnetisierbare Kugel des Radius  $R$  mit magnetischer Suszeptibilität  $\chi_i$ , welche in ein zweites Material mit Suszeptibilität  $\chi_a$  eingebettet wird (Abbildung 11.1). Weit weg von der Kugel generieren externe Ströme ein Magnetfeld  $\mathbf{H}_{ext}$ . Wie bei dem dielektrischen Loch aus Vorlesung 7, ist das durch die Präsenz der Kugel verbogene Außenfeld die Superposition des homogenen externen Feldes ohne Kugel und einem Dipolfeld. Das Innenfeld ist ein homogenes Feld und hat die selbe Symmetrie wie das ungestörte Außenfeld:

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \left( \mathbb{1} + \alpha \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2\mathbb{1}}{4\pi r^5} \right) \cdot \mathbf{H}_{ext} & \text{für } r > R \\ \beta \mathbf{H}_{ext} & \text{für } r < R \end{cases} \quad (11.12)$$

mit Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$ , die wir aus den Stetigkeitsbedingungen  $\epsilon_0 c^2 \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{r} = (1 + \chi_i) \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{r} = (1 + \chi_i) \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{r} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{B}_a \cdot \mathbf{r}$  und  $\mathbf{H}_i \times \mathbf{r} = \mathbf{H}_a \times \mathbf{r}$  an der Stelle  $r = R$  bestimmen.

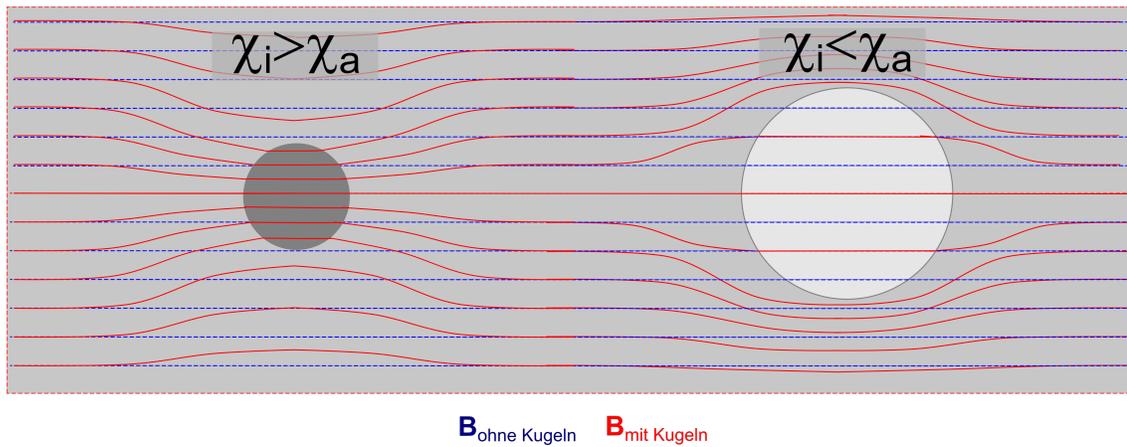
Wir finden so das Magnetfeld:

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \left( \mathbb{1} + \frac{V_{Kugel}(\chi_i - \chi_a)}{1 + \chi_i + 2(1 + \chi_a)} \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2\mathbb{1}}{4\pi r^5} \right) \cdot \mathbf{H}_{ext} & \text{für } r > R \\ \frac{3(1 + \chi_a)}{1 + \chi_i + 2(1 + \chi_a)} \mathbf{H}_{ext} & \text{für } r < R \end{cases} \quad (11.13)$$

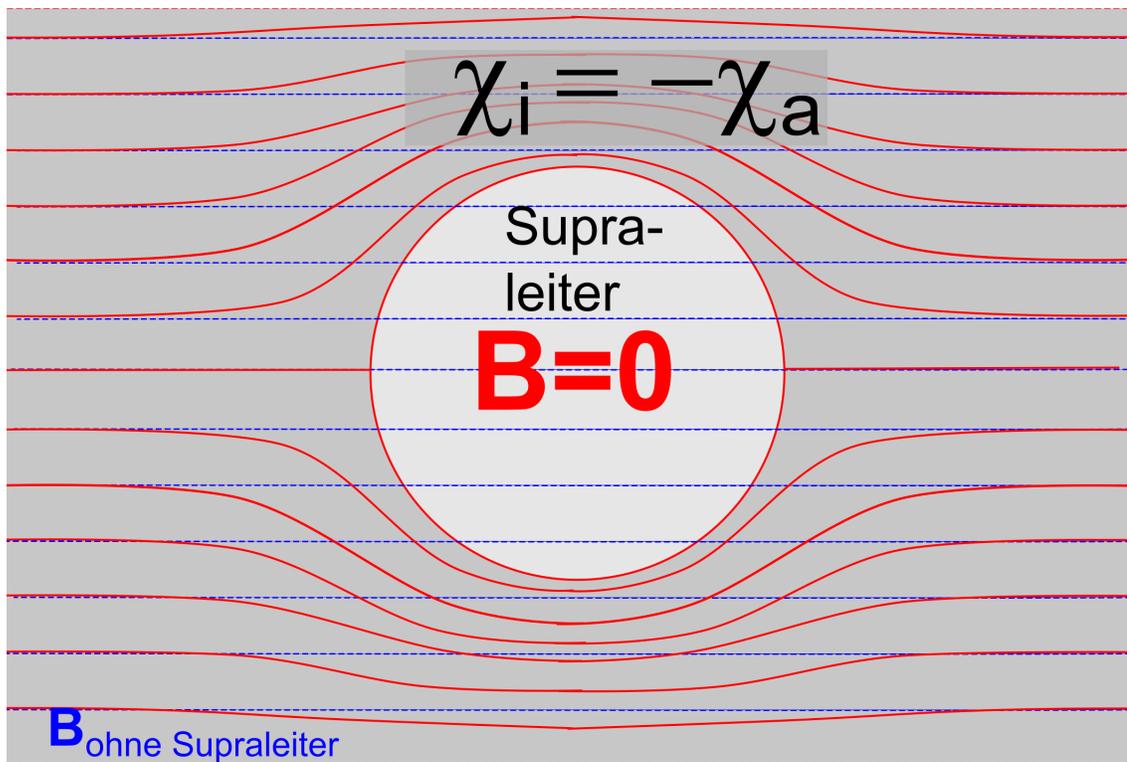
und die magnetische Flussdichte

$$\mathbf{B} = (1 + \chi(r)) \mathbf{H} \quad (11.14)$$

$$= \begin{cases} \left( \mathbb{1} + \frac{V_{Kugel}(\chi_i - \chi_a)}{1 + \chi_i + 2(1 + \chi_a)} \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2\mathbb{1}}{4\pi r^5} \right) \cdot \mathbf{B}_{ext} & \text{für } r > R \\ \frac{3(1 + \chi_i)}{1 + \chi_i + 2(1 + \chi_a)} \mathbf{B}_{ext} & \text{für } r < R \end{cases} \quad (11.15)$$



**Abbildung 11.1:** Verlauf der Feldlinien der magnetischen Flussdichte für eine paramagnetische und eine diamagnetische Kugel.



**Abbildung 11.2:** Ein Supraleiter ist ein idealer Diamagnet, der die magnetische Flussdichte vollständig in den Außenraum verdrängt (Meissner-Effekt).

In Abbildung 11.1 zeigen wir die Flussdichte einer Kugel mit ( $\chi_i > \chi_a$ ), sowie einer Kugel mit ( $\chi_i < \chi_a$ ). Die Flussdichte verbiegt sich so, dass mehr Fluss durch die Region höherer Suszeptibilität erfolgt als durch die Region niedrigerer Suszeptibilität. Ein Spezialfall ist der ideale Diamagnet mit Suszeptibilität  $\chi = -1$ , bei dem die Flusslinien vollständig aus der ideal diamagnetischen Kugel herausgedrängt werden, ein Phänomen, das man Meissnereffekt nennt (Abbildung 11.2). Ein Supraleiter ist ein idealer Diamagnet. Ein Supraleiter erster Art zeigt den Meissner-Effekt und er hat die konstituierende Gleichung

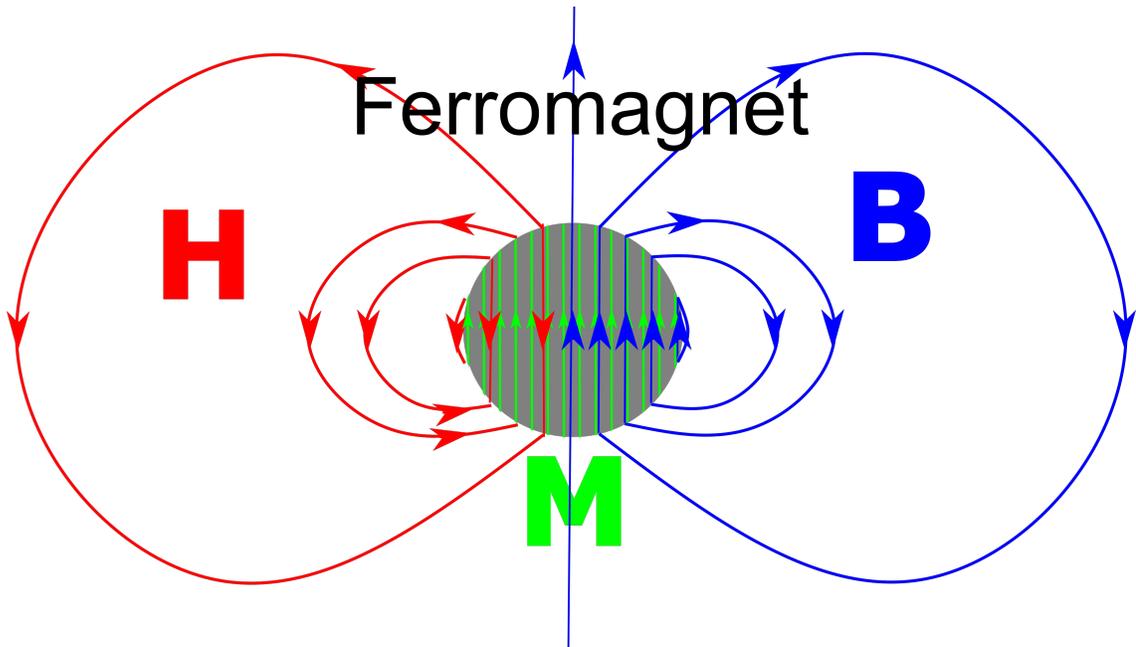
$$\mathbf{B} = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{E} = 0 \quad (11.16)$$

### 11.3 Ferromagnetismus

Ein idealer weicher Ferromagnet hat die konstituierende Gleichung

$$\mathbf{M} = M_s \frac{\mathbf{B}}{B}. \quad (11.17)$$

Seine Magnetisierung hat immer den selben Betrag und richtet sich entlang der magnetischen Flussdichte aus. In Abbildung 11.3 zeigen wir die Flussdichte, das Magnetfeld und die Magnetisierung eines Magneten für eine ferromagnetische Kugel. Die magnetische Flussdichte wird in der Kugel von deren permanenter Magnetisierung dominiert, und beide zeigen in die gleiche Richtung. Die Flussdichte-Feldlinien können an der Stirnseite der Ferromagnet/Vakuum-Grenzfläche wegen ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ) nicht aufhören und verlaufen im Vakuum weiter und führen außerhalb der Kugel zurück, bevor sie sich an der Rückseite der Grenzfläche zu einer geschlossenen Kurve schließen. Im Vakuum ist die Flussdichte bis auf den lästigen Faktor  $\epsilon_0 c^2$  identisch mit dem Magnetfeld. Die Parallelkomponente des Magnetfeldes ist an der Ferromagnet/Vakuum-Grenzfläche stetig, weil wir keine externen Ströme dort platziert haben. Aus diesem Grund dringt das Magnetfeld über die Ferromagnet/Vakuum-Grenzfläche zwischen der Stirn und Rückseite der Grenzfläche in die Kugel ein und es entwickelt sich ein Depolarisationsmagnetisches Feld, dass der Magnetisierung entgegengerichtet ist und im Allgemeinen von den Details der Geometrie des Ferromagneten abhängt. Das Depolarisationsfeld ist ein kollektiver Effekt, der über magnetische Dipolwechselwirkungen versucht gegen das Ausrichten der einzelnen Dipole anzukämpfen. Die parallele Ausrichtung der Dipolmomente selbst ist kein magnetischer sondern ein elektrostatischer Quanteneffekt, den wir als nächstes besprechen müssen.



**Abbildung 11.3:** Flussdichte, Magnetfeld und Magnetisierung einer ferromagnetischen Kugel. Beachten Sie, dass die Magnetisierung einen festen, durch die konstituierende Gleichung festgelegten geometrieunabhängigen Wert hat, während die Flussdichte und das Magnetfeld einen geometrieabhängigen Wert annehmen.

## 11.4 Die Austauschwechselwirkung

Elektronen sind quantenmechanische Teilchen, die zur Klasse der Fermionen zählen. Fermionen sind individualistische Teilchen. Dieser Individualismus manifestiert sich darin, dass zwei Fermionen niemals im gleichen Quantenzustand existieren können. Sie müssen sich immer in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden. So können zwei Elektronen mit dem gleichen Spin nicht alle anderen Quantenzahlen gleich haben.

Wir betrachten das Heliumatom (Abbildung 11.4), in dem zwei Elektronen sich einen doppelt positiv geladenen Heliumkern teilen. Haben die beiden Elektronen entgegengesetzten Spin ist ihr Individualistendrang befriedigt und sie können beide in den Quantenzustand gehen, der die Gesamtenergie eines einzelnen Elektrons unter Einhaltung der Unschärferelation minimiert. Der selbe Zustand ist aber für ein zweites Elektron mit dem selben Spin verboten. Aus diesem Grund ist die Gesamtenergie eines Heliumatoms mit antiparallelen Elektronenspins niedriger als die Energie eines Heliumatoms mit parallelen Elektronenspins

$$E_{He}(\uparrow\downarrow) < E_{He}(\uparrow\uparrow) \quad (11.18)$$

Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus elektrostatischer und kinetischer Energie der Elektronen und magnetische Dipolwechselwirkungen zwischen den Elektronen kann vernachlässigt werden. Es ist der Individualistencharakter der Elektronen, der die elektrostatische Energie der Elektronen indirekt spinabhängig macht.

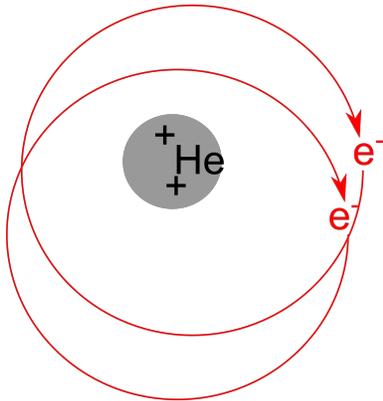


Abbildung 11.4: Zwei Elektronen umkreisen einen Heliumkern

Wenn wir kompliziertere Atome betrachten kann es auch vorkommen, dass eine parallele Spinstellung der Elektronen energetisch günstiger ist als eine antiparallele Spinstellung. Man bezeichnet den elektrostatischen Energieunterschied beider Spinstellungen als Austauschwechselwirkung. Die Austauschwechselwirkung ist ein quantenmechanischer Effekt elektrostatischen und nur indirekt magnetostatischen Charakters. Die Dipolwechselwirkung

$$E_{ij} = \boldsymbol{\mu}_i \cdot \frac{(3\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_{ij} - r_{ij}^2\mathbb{1})}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{ij}^5} \cdot \boldsymbol{\mu}_j \quad (11.19)$$

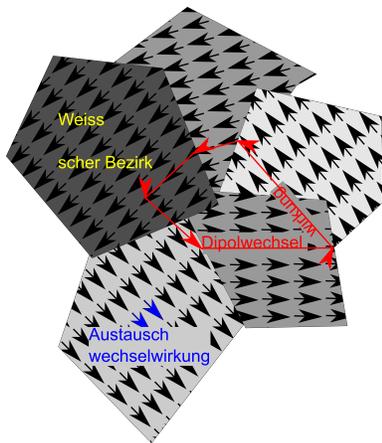


Abbildung 11.5: Domänenstruktur eines Ferromagneten

ist wesentlich schwächer als die Austauschwechselwirkung, wirkt aber langreichweitig zwischen allen noch so weit separierten Elektronen. Der kollektive Charakter der Dipolwechselwirkung setzt sich deshalb auf großen (Mikrometer) Längenskalen durch und versucht, dass sich die Dipolmomente der Atome zu geschlossenen Kurven verbiegen. Diesen Wettstreit der beiden Wechselwirkungen

gewinnt auf Submikrometerskala die Austauschwechselwirkung und die Atome richten ihre magnetischen Momente in sogenannten Weiss'schen Bezirken parallel aus. Die Weiss'schen Bezirke bilden zwischen den Bezirken Domänengrenzen aus, so dass die Ausrichtung der magnetischen Momente in verschiedenen Domänen sich zu geschlossenen Kurven zusammenfügen (Abbildung 11.5). Ein jungfräulicher Ferromagnet produziert über die Domänenstruktur kein äußeres Magnetfeld. Erst das Anlegen eines externen Magnetfelds bewegt die Domänenwände, so dass nun ein permanentes externes Magnetfeld messbar wird.

## 11.5 Intermezzo

Wir schließen diese Vorlesung, indem wir die bisher besprochenen elektrostatischen und magnetostatischen Maxwell-Gleichungen ihren immer gültigen dynamischen Gleichungen gegenüberstellen. Beachten Sie, dass wir rot markierte Gleichungen nie begründet haben, und diese von Ihnen zu schlucken sind, ohne dass Sie verstehen können warum diese Gleichungen gelten. Es sind die Axiome der Elektrodynamik, für die wir derzeit keine andere Begründung haben, als dass sie seit dem 19. Jahrhundert fehlerfrei (abgesehen von ein paar quantenelektrodynamischen Verallgemeinerungen) funktioniert haben.

Statik		Dynamik
$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$		$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$
	elektrisches Feld $\mathbf{E}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$		$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\mathbf{E} = -\nabla \phi$		$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$		$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{ \mathbf{r}-\mathbf{r}' ^3} d^3\mathbf{r}'$	magnetische Flussdichte $\mathbf{B}$	
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$		$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$		$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$
$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}$		$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
$\mathbf{B} = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{ \mathbf{r}-\mathbf{r}' ^3} d^3\mathbf{r}'$	Potenziale	
$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$		$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}$		$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0 c^2}$
$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ Coulombbeziehung	Greens- Funktionen	$c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ Lorentzbeziehung
$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0  \mathbf{r}-\mathbf{r}' } \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$		$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\delta(t-t'- \mathbf{r}-\mathbf{r}' /c)}{4\pi\epsilon_0  \mathbf{r}-\mathbf{r}' } \rho(\mathbf{r}', t') d^3\mathbf{r}' dt'$
$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2  \mathbf{r}-\mathbf{r}' } \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$	Energiedichte	$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\delta(t-t'- \mathbf{r}-\mathbf{r}' /c)}{4\pi\epsilon_0 c^2  \mathbf{r}-\mathbf{r}' } \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') d^3\mathbf{r}' dt'$
	$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2)$	

*Axiome*

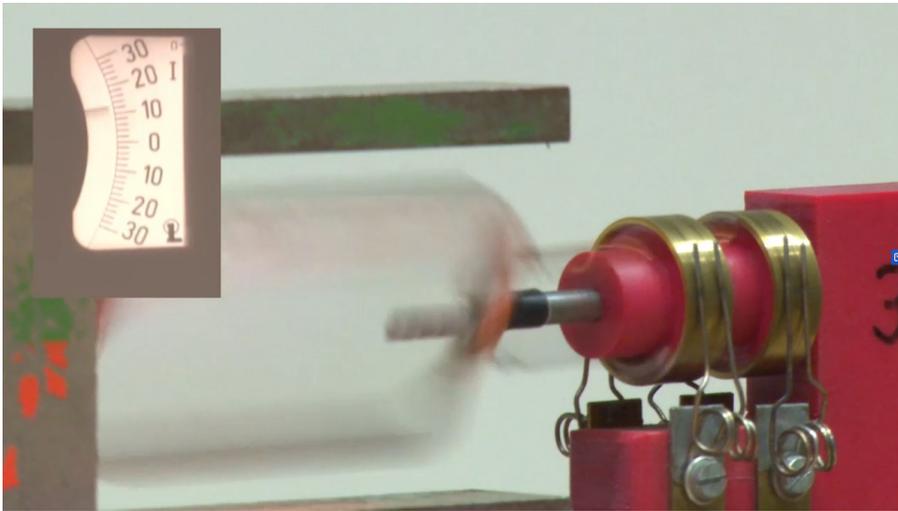
(11.20)

Des weiteren listen wir unsere Sammlung an konstituierenden Gleichungen auf, die Sie ebenfalls zu akzeptieren haben, ohne sie in dieser Vorlesung tiefer zu verstehen. Für jede der konstituierenden Gleichungen gibt es eine physikalische Herleitung aus den Axiomen, die aber erst in späteren Vorlesungen geliefert werden.

### konstituierende Gleichungen

Vakuum:	$\mathbf{P} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}$
ideales Metall:	$\mathbf{E} = \mathbf{0}$
Dielektrikum:	$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$
Plasma:	$\rho_+^{eq} + \rho_-^{eq} = 0, \quad \delta\rho_+ = 0$
Elektrolyt:	Poisson-Boltzmann-Gleichung (Debye-Hückel-Gleichung) (11.21)
Atom:	$\Delta p \Delta x \geq h$
Paramagnet:	$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad \chi > 0$
Diamagnet:	$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad \chi < 0$
Supraleiter erster Art:	$\mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{0}$
Ferromagnet:	$\mathbf{M} = M_s \mathbf{B} / B$





## Kapitel 12

# Zeitabhängige elektrische Felder

In dieser Vorlesung besprechen wir das Faradaysche Durchflutungsgesetz. Wir unterscheiden konservative und nicht konservative elektrische Felder, definieren die elektromotorische Kraft und den magnetischen Fluss. Wir besprechen die Konsequenzen der elektromotorischen Kraft in Nichtleitern, Leitern und Supraleitern und zeigen eine Reihe wichtiger und unwichtiger Anwendungen des Induktionsgesetzes. Wir besprechen die Grundprinzipien eines Generators und gehen auf die Auswirkungen der Leistungsbilanz auf die Frequenz des erzeugten Stromes ein. Wir unterscheiden zwischen Wirk- und Blindleistung in einem Stromkreis.

## 12.1 Induktion

Wir verlassen das Gebiet der Statik und untersuchen nun die Effekte der dynamischen Terme in den Maxwell-Gleichungen. Wir beginnen mit der homogenen Maxwell-Gleichung mit zeitabhängigem Term, dem Faradayschen Durchflutungsgesetz.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (12.1)$$

bei dem wir den Term mit der Zeitableitung aus Hervorhebungsgründen auf die rechte Seite der Maxwellgleichung gestellt haben.

Wir integrieren das Durchflutungsgesetz über eine Fläche  $A$  und erhalten

$$\oint_{\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_A \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA \quad (12.2)$$

Wir definieren die elektromotorische Kraft

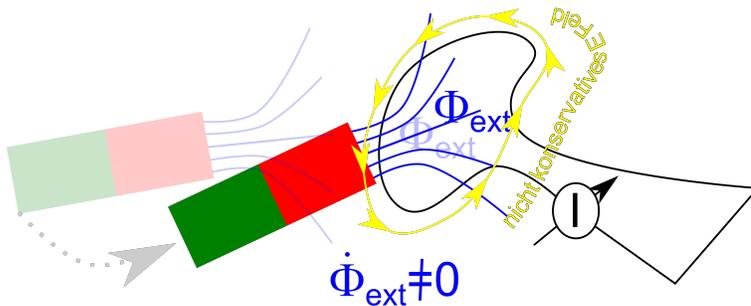
$$\mathcal{EMF} = \int_{\gamma(s)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (12.3)$$

Die elektromotorische Kraft ist genauso definiert, wie die elektrische Spannung  $U$ , bzw. der Potenzialunterschied. Im Gegensatz zum Potenzialunterschied hängt die elektromotorische Kraft jedoch vom Weg, entlang dem wir integrieren ab. Nur so ist es überhaupt möglich einen endlichen Wert der elektromotorischen Kraft längs eines geschlossenen Weges zwischen dem Ende des Weges und demselben Anfang des Weges zu erhalten. Wir definieren weiterhin den magnetischen Fluss als das Integral der Flussdichte über die Fläche:

$$\Phi := \int_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (12.4)$$

Wir erhalten so die integrale Form des Durchflutungsgesetzes:

$$\mathcal{EMF} = -\dot{\Phi} \quad (12.5)$$



**Abbildung 12.1:** Eine Änderung des externen magnetischen Flusses erzeugt ein nichtkonservatives elektrisches Wirbelfeld

Wenn wir den magnetischen Fluss durch eine Leiterschleife ändern wollen, können wir versuchen einen Permanentmagneten an die Leiterschleife heranzuführen, so dass wir eine externe Flussänderung  $\dot{\Phi}_{ext}$  der Leiterschleife aufzwingen (Abbildung 12.1). Die externe Flussänderung bewirkt gemäß des Faradayschen Durchflutungsgesetzes eine elektromotorische Kraft, auf die die Ladungen im Leiter gemäß den konstituierenden Gleichungen des Materials (kausal d.h. in der Regel zeitverzögert) reagieren werden. Für ein Metall und für einen Supraleiter haben wir die statische konstituierende Gleichung  $\mathbf{E} = 0$  aufgeschrieben. Im dynamischen Fall bleibt diese Gleichung weder für einen Supraleiter noch im Metall richtig und beide konstituierenden Gleichungen müssen erweitert werden. Wir wollen hier annehmen, dass die zeitlichen Veränderungen des magnetischen Flusses  $\dot{\Phi}$  so langsam erfolgt, dass das Material quasi instantan sich auf die veränderte Situation einstellen kann. In dieser Näherung bleibt die konstituierende Gleichung  $\mathbf{E} = 0$  für einen Supraleiter richtig. Wir betrachten also zunächst den einfacheren Fall einer supraleitenden Leiterschleife. Diese Leiterschleife duldet keine elektrischen Felder in ihrem Inneren und entwickelt deshalb (nach kurzer transientser Zeit  $\tau \approx l/c$  mit  $l$  der Ausdehnung des Supraleiters) eine interne elektromotorische Gegenkraft

$$\mathcal{EMF}_{int} = -\mathcal{EMF}_{ext}, \quad (12.6)$$

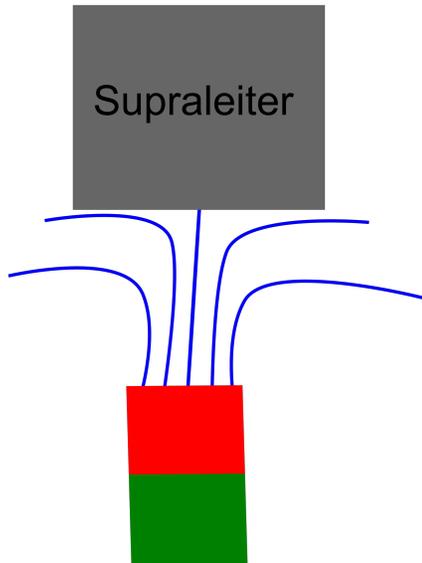
die die externe elektromotorische Kraft kompensiert. Entsprechend dem Faradayschen Durchflutungsgesetz muss dann auch die externe Flussänderung durch eine interne Flussänderung kompensiert werden und der Supraleiter baut ein internes Gegenmagnetfeld auf, das das externe Magnetfeld aufhebt. Es ändert sich im Supraleiter nur die Stromdichte. Es kann zwar eine magnetische Feldlinie in die offene Fläche der Leiterschleife eindringen, sie muss jedoch die Fläche ein zweites Mal durchdringen und auf die ursprüngliche Seite der Fläche zurückkehren ohne sich um die Leiterschleife herumzuwinden.

Der Supraleiter wird durch das externe Magnetfeld selbst zu einem Magneten der so gerichtet ist, dass externer und internen Magnet sich abstoßen, und zwar mit einer mechanischen Kraft, welche die externe mechanische Kraft, mit der wir versuchen den externen Magneten an den Supraleiter heranzuführen, kompensiert. Die Situation bleibt vollkommen statisch.

Wir können eine Supraleiter aus diesem Grund über permanenten Magneten schweben lassen (Abbildung 12.2). Thomas und Melanie haben dazu ein Experiment auf den E-Learning Server gestellt, bei dem wir allerdings nicht verschweigen wollen, dass der benutzte Hochtemperatursupraleiter ein Supraleiter zweiter Art ist, und die Verhältnisse im Experiment deshalb komplizierter als hier dargestellt sind.

Auch in einer metallischen Leiterschleife versuchen die Elektronen des Metalls wie in einem Supraleiter zu reagieren. Allerdings behindern thermische Gitterschwingungen der Atome einen ungehinderten Stromfluß. Ein Elektron im Metall wird durch die elektromotorische Kraft beschleunigt und kompensiert durch seine eigene Bewegung über den Aufbau eines Gegenmagnetfeldes solange die externe elektromotorische Kraft, bis es mit den Gitterschwingungen der Atome zusammenstößt. Den Moment des Zusammenstoßes nutzt das externe Magnetfeld um eine Feldlinie der externen Flussdichte durch den Leiter zu drücken. Dadurch gelingt es dem Magnetfeld seine ja geschlossenen Flusslinien um den Leiter zu wickeln und den magnetischen Fluss in der vom Leiter umschlossenen Fläche zu erhöhen. Der in der Leiterschleife induzierte Strom wirkt der eindringenden magnetischen Flussdichte zwar durch ein Gegenfeld entgegen, die intern generierte Flussdichte kompensiert die externe Flussdichte aber nur teilweise. Es gelingt uns deshalb diesmal einen Permanentmagneten in eine Leiterschleife einzuführen.

Melanie und Thomas haben ein Video eines Leiterschleifenpendels auf die E-Learning Seite gestellt, bei dem die Leiterschleife zum Pendeln gebracht wird, indem wir periodisch (nahe der Resonanz-



**Abbildung 12.2:** Man kann einen Supraleiter über einem Magneten mit Hilfe des induzierten Gegenfeldes schweben lassen.

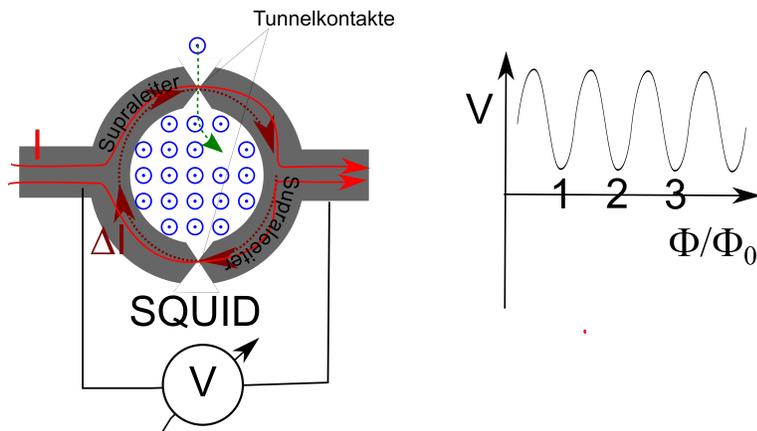
frequenz des Pendels) einen Permanentmagneten ein- und wieder ausführen. Beachten Sie bei dem Video, dass sich der Abstand zwischen Leiterpendel und Permanentmagnet tatsächlich periodisch ändert und das Pendel nicht starr geführt ist, wie das bei einem supraleitenden Leiterpendel scheinbar (auch hier gibt es eine Zeitverzögerung  $\tau \approx l/c$  die so kurz ist, dass wir sie nicht auflösen können) der Fall wäre.

Wir können den in der Leiterschleife induzierten Strom messen. Der induzierte Strom verschwindet für eine nichtleitende dielektrische Leiterschleife und wächst mit der Leitfähigkeit des Materials bis er bei einem Supraleiter seinen Maximalwert erreicht.

Wir können auch in einen supraleitende Leiterschleife magnetischen Fluss eindringen lassen, hierzu muss der Supraleiter an der Eindringstelle kurzzeitig normalleitend werden, so dass der Fluss wie bei einem metallischen Leiter an der normalleitenden Stelle eindringen kann. In ein supraleitenden Quanteninterferenz-Device (SQUID) werden absichtlich zwei Schwachstellen in einem ansonsten supraleitenden Ring eingebaut die als Eindringstellen dienen (Abbildung 12.3). Die Schwachstellen sind allerdings so dünn, dass die durch die beiden Schwachstellen getrennten Teile des Supraleiters durch den quantenmechanischen Tunneleffekt miteinander gekoppelt sind und sich deshalb auch die normalleitenden Schwachstellen noch wie ein Supraleiter verhalten. Die supraleitenden Ladungsteilchen, die man Cooperpaare nennt versuchen einen stationären Zustand herzustellen, was nur gelingt wenn der magnetische Fluss

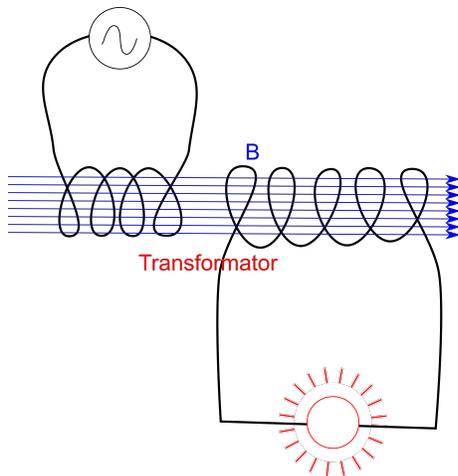
$$\int_A \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} d^2 A = \oint_{\partial A} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = n\phi_0 = n \frac{h}{2e} \quad (12.7)$$

mit  $n \in \mathbb{Z}$  beträgt. Einen stromfreien Zustand für andere Werte des magnetischen Flusses gibt es in



**Abbildung 12.3:** Ein SQUID ist nur wirbelstromfrei, wenn sein Inneres ganzzahlige Vielfache eine Flussquants enthält. Den roten Gesamtstrom durch das SQUID braucht man um den Effekt über einen Spannungsabfall messen zu können.

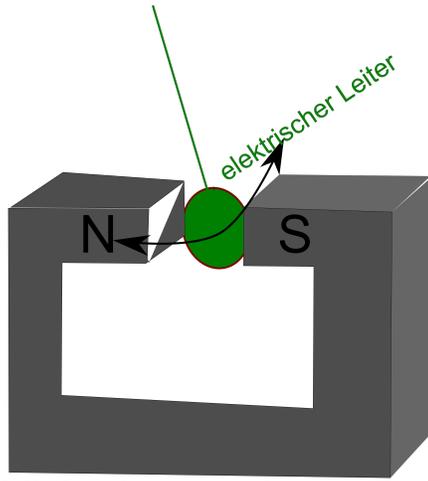
dem Supraleiter nicht. Quantenmechanisch wehrt sich ein Leiter nicht nur gegen das Eindringen von magnetischem Fluss, er duldet zudem keine nicht ganzzahligen Werte von Flussquants  $\phi_0$  in seinem Inneren. Der insgesamt von einem supraleitenden Teil zum anderen supraleitenden Teil fließende Strom, ist eine periodische Funktion des magnetischen Flusses mit der Periode eines Flussquants. SQUIDS sind Messgeräte zur Messung von sehr kleinen magnetischen Flussänderungen.



**Abbildung 12.4:** Prinzip eines Transformators

Wir können die Änderung des Magnetfeldes in der Leiterschleife auch mit einem über externe Ströme generiertes Magnetfeld erreichen. Wir haben dann eine primäre und eine sekundäre Leiterschleife. Wenn wir an die Primärschleife eine Wechselstromquelle anschließen können wir die Wechselstromleistung mit der sekundären Leiterschleife abgreifen und damit ein Leistung ziehendes Gerät im

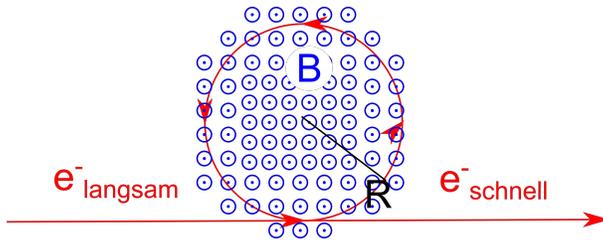
Sekundärkreis betreiben. Wir haben mit zwei Leiterschleifen einen Transformator (Abbildung 12.4).



## Wirbelstrombremse

**Abbildung 12.5:** Ein zwischen Magneten pendelnder Leiter wird über Wirbelströme gebremst

Wir können die mechanische Gegenkraft beim Eindringen des Magneten zum kontaktlosen Bremsen benutzen. Viele Straßenbahnen nutzen diese Wirbelstrombremse. Wenn wir einen Niobborkugelmagnet durch ein Kupferrohr fallen lassen, so wird die Kugel durch die induzierte Gegenflussdichte im Kupferrohr gebremst und braucht zum Durchfallen des Rohres deutlich länger als beim Fallen durch ein seitlich aufgeschlitztes Rohr, bzw. durch ein Plastikrohr.



**Abbildung 12.6:** Beschleunigung des Elektrons auf einer imateriellen Kreisbahn eines Betatron

Die Leiterschleife muss nicht unbedingt vorhanden sein, wir können ein Elektron auch auf einer virtuellen Leiterschleife beschleunigen wenn es uns gelingt die quer zur Leiterschleife angreifenden Lorentzkräfte so einzustellen, dass diese die Zentripedalkräfte bewirken, welche das beschleunigte Elektron während der Beschleunigung auf der virtuellen Kreisbahn hält. Dies gelingt genau dann, wenn das Magnetfeld an der Stelle der Kreisbahn mit Radius  $R$  halb so schnell hoch gefahren wird wie die mittlere Flussdichte durch die eingeschlossene Kreisbahnfläche (Abbildung 12.6).

$$\frac{\partial \mathbf{B}(R, \phi, z, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\partial \mathbf{B}(\rho, \phi, z, t)}{\partial t} \quad (12.8)$$

Ein Betatron ist ein altmodischer Beschleuniger, der nach diesem Prinzip funktioniert.

## 12.2 Wechselstromgenerator

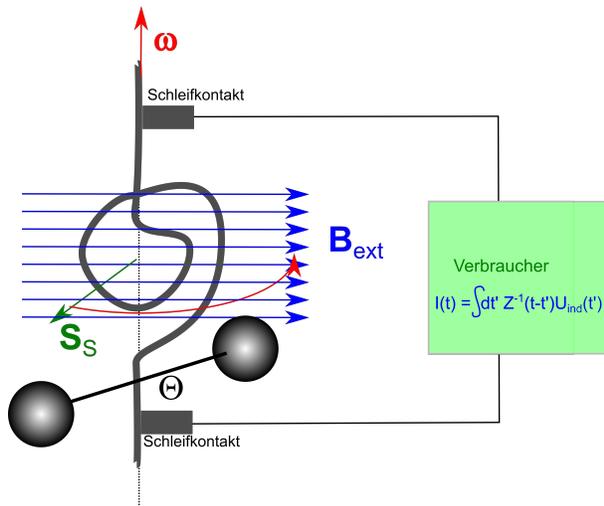


Abbildung 12.7: Generator mit linearem Verbraucher

Wir betrachten einen Stromkreis mit einem Wechselstromgenerator und einem Verbraucher, wie in Abbildung 12.7 dargestellt. Hierbei greift an einer Achse das externe Drehmoment  $\tau_{ext}$  an und versucht die Drehachse, auf der eine Spule des Radius  $R$  mit  $N$  Wicklungen mit Spulenflächenvektor  $\mathbf{S}_S = N\pi R^2 \mathbf{n}$  senkrecht zur Drehachse montiert ist, zu drehen. Eine externe Flussdichte  $\mathbf{B}_{ext}$  greift durch die Spule (Bei einer Spule mit  $N$  Wicklungen ist der Spulenflächenvektor die Summe der Spulenflächenvektoren jeder einzelnen Wicklung). Schleifkontakte an den Achsen schließen einen Stromkreis, in dem ein Verbraucher eingebaut ist. Die Änderung des externen Flusses beträgt

$$\dot{\Phi}_{ext} = \mathbf{B}_{ext} \cdot \dot{\mathbf{S}}_S = \mathbf{B}_{ext} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_S) \quad (12.9)$$

Die dadurch über das Faradaysche Durchflutungsgesetz erzeugte elektromotorische Kraft, beschleunigt die Elektronen in der Spule, nicht jedoch die Elektronen die sich im Leiter außerhalb der Spule befinden. Die ungleiche Beschleunigung der Elektronen lässt in Teilen des Stromkreises Strom fließen, während in anderen Teilen kein Strom fließt. Der Leiter lädt sich deshalb an den Stellen auf, wo der Leiter aus dem Magnetfeld heraus und hineinfließt. Dies geschieht jedoch auf einer sehr schnellen Zeitskala  $\tau \approx l/c$ , wobei  $l$  die Abmessungen des Stromkreises sind. Die Aufladung der Stellen ist so, dass die dadurch generierten konservativen elektrischen Felder die elektromotorische Kraft in der Spule kompensieren (die Kompensation ist längs des Weges der Spule, ein elektrisches Feld auf direktem Weg von Spulenanfang zu Spulenende durch das Vakuum, muss wegen der nicht-konservativen Natur der elektromotorischen Kraft bestehen bleiben). Wenn sich nach dieser kurzen transienten Zeit ein über den Gesamtstromkreis konstanter Strom  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  eingestellt hat. Fällt eine konservative induzierte Spannung  $U_{ind}$  beim Verbrauchers ab, nicht mehr an der Spule. Der sich einstellende Strom  $I$  führt zu einem magnetischen Moment  $\boldsymbol{\mu} = I\mathbf{S}_S$ , welches in der externen Flussdichte ein Drehmoment

$$\boldsymbol{\tau}_{int} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_{ext} \quad (12.10)$$

spürt. Die Hauptachsen des Trägheitsmomententensor  $\Theta$  der Spule plus Achse verlaufe entlang der Drehachse, so dass wir für das Gesamtdrehmoment schreiben können:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext} + \boldsymbol{\tau}_{int} = \dot{\mathbf{L}} \stackrel{\text{Hauptachsenausrichtung}}{=} \Theta_1 \dot{\boldsymbol{\omega}}. \quad (12.11)$$

Das interne Drehmoment

$$\boldsymbol{\tau}_{int} = I(t) \mathbf{S}_S(t) \times \mathbf{B}_{ext} \quad (12.12)$$

ist proportional zum durch den Verbraucherstromkreis fließenden Wechselstrom  $I(t)$ . Ein linearer Verbraucher reagiert auf eine Spannung  $U_{ind}$  mit einem Strom  $I(t)$ , der eine lineare (eventuell zeitverzögerte) Funktion der angelegten Spannung ist:

$$I(t) = \int_{-\infty}^t dt' Z^{-1}(t-t') U_{ind}(t'). \quad (12.13)$$

Dabei bezeichnet  $Z$  die Impedanz des Verbrauchers. Mit dieser konstituierenden Gleichung beträgt das interne Drehmoment

$$\boldsymbol{\tau}_{int} = \int_{-\infty}^t dt' Z^{-1}(t-t') U_{ind}(t') \mathbf{S}_S(t) \times \mathbf{B}_{ext} = - \int_{-\infty}^t dt' Z^{-1}(t-t') \dot{\Phi}_{ext}(t') \mathbf{S}_S(t) \times \mathbf{B}_{ext} \quad (12.14)$$

$$= - \int_{-\infty}^t dt' Z^{-1}(t-t') [\mathbf{B}_{ext} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_S(t'))] \mathbf{S}_S(t) \times \mathbf{B}_{ext} \quad (12.15)$$

$$= - \int_{-\infty}^t dt' Z^{-1}(t-t') [\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{S}_S(t') \times \mathbf{B}_{ext})] \mathbf{S}_S(t) \times \mathbf{B}_{ext} \quad (12.16)$$

Wir multiplizieren Gleichung 12.14 mit der Kreisfrequenz und erhalten so die Leistungsbilanz

$$P = P_{ext} + P_{int} = \boldsymbol{\tau}_{ext} \cdot \boldsymbol{\omega} - \int_{-\infty}^t dt' [(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}_S(t) \times \mathbf{B}_{ext}) Z^{-1}(t-t') (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}_S(t') \times \mathbf{B}_{ext})] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Theta_1 \omega^2 \quad (12.17)$$

Wir sehen, dass die Gesamtleistung sich aufteilt in intern vom Verbraucher dem Generator zugeführter Leistung und extern dem Generator zugeführter Leistung die zur Beschleunigung des Generators benötigt wird. Ist die externe Leistung größer als die vom Verbraucher nachgefragte Leistung  $-P_{int}$  beschleunigt der Generator und die Drehfrequenz steigt. Ist die externe Leistung geringer als die nachgefragte Leistung bremst der Generator und die Frequenz sinkt. In einem Kraftwerk merkt der Betreiber an der Frequenzänderung, ob mehr oder weniger Verbraucherleistung nachgefragt wird, ohne dass er auf die Beschwerden des Verbrauchers warten muss.

Wenn wir annehmen, dass die Kreisfrequenz  $\omega$  schön konstant gehalten werden kann, so können wir die Flussänderung als

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}_S(t) \times \mathbf{B}_{ext}) = N \omega \pi R^2 B_{ext} \cos(\omega t) \quad (12.18)$$

schreiben. Wir benutzen

$$\cos(\omega t) \cos(\omega t') = \cos(\omega t) \cos(\omega(t-t'+t)) = \cos^2(\omega t) \cos(\omega(t-t')) + \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin(\omega(t-t')) \quad (12.19)$$

und definieren

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \int e^{i\omega t} Z^{-1}(t) dt \quad (12.20)$$

und können die vom Verbraucher aufgebrachte Leistung schreiben als Summe zweier Beiträge, der Wirkleistung und Blindleistung

$$P_{int} = P_{Wirk} + P_{Blind}, \quad (12.21)$$

$$P_{Wirk} = -\frac{(N\omega\pi R^2 B_{ext})^2}{\Re Z(\omega)} \cos^2(\omega t), \quad (12.22)$$

$$P_{Blind} = -\frac{(N\omega\pi R^2 B_{ext})^2}{\Im Z(\omega)} \cos(\omega t) \sin(\omega t), \quad (12.23)$$

Die über eine zeitliche Periode  $T = 2\pi/\omega$  gemittelte Wirkleistung ist

$$P_{Wirk}^{eff} = \frac{\int_0^T dt P_{Wirk}(t)}{\int_0^T dt} = -\frac{(N\omega\pi R^2 B_{ext})^2}{2\Re Z(\omega)} \quad (12.24)$$

während die effektive Blindleistung verschwindet:

$$P_{Blind}^{eff} = \frac{\int_0^T dt P_{Blind}(t)}{\int_0^T dt} = 0. \quad (12.25)$$

Unser Modellgenerator funktioniert wie ein eintaktiger Traktor und stellt dem Verbraucher nur Energie zur Verfügung wenn der Spulenflächennormalenvektor senkrecht zum Feld steht. Ein solcher Generator läuft deshalb wie ein Eintakttraktor sehr unruhig. In der Praxis produziert ein Generator Energie mit drei um 120 Grad gegeneinander versetzten Spulen, die drei Stromkreise phasenversetzt mit Leistung versorgt. Die gleichmäßigere Leistungsversorgung bewirkt ein ruhigeres Laufen des Generators. Ist der Verbraucher ein Plattenkondensator, eine Spule, oder eine unbenutzte Steckdose, so ist die Impedanz  $Z(\omega)$  rein imaginär und es wird effektiv nichts geleistet. Für einen Widerstand ist die Impedanz rein reell und es treten keine Blindleistungen auf.

## 12.3 Übungen

### 12.3.1 Ferroelektrika

Ein Ferroelektrikum ist das elektrische Analogon zu einem Ferromagnet und folgt der konstituierenden Gleichung  $\mathbf{P} = -P_s \frac{\mathbf{E}}{E}$  mit der konstanten Sättigungspolarisation  $P_s$ . Wir betrachten eine ferroelektrische Kugel des Radius  $R$  mit  $\mathbf{P} = P_s \mathbf{e}_z$  die im Vakuum schwebt und keinen externen Ladungen ausgesetzt ist.

- Zeichnen Sie qualitativ die Feldlinien der Polarisation in die Kugel ein und geben Sie die Richtungen der Feldlinien an.
- Wo sitzen interne Ladungen und welches Vorzeichen haben diese?
- Zeichnen Sie das elektrische Feld im Vakuum ein und geben Sie die Richtung der Feldlinien an.

- Zeichnen Sie das dielektrische Verschiebungsfeld im Vakuum ein und erklären Sie den Zusammenhang mit dem elektrischen Feld.
- Schließen Sie unter Benutzung der Randbedingungen an das elektrische Feld und an das dielektrische Verschiebungsfeld auf die Richtung beider Felder im Inneren der Kugel.

### 12.3.2 Magnetische Streifenmuster

Aus einer Serie von Ferromagneten der Magnetisierung  $\mathbf{M} = \pm M_s \mathbf{e}_z$  wird ein Streifenmuster der Periode  $\lambda$  gebastelt bei dem die Magneten abwechseln eine Magnetisierung nach oben und unten besitzen und den Halbraum  $z < 0$  füllen (siehe 12.8). Von außen wird ein externes Magnetfeld der Stärke  $\mathbf{H}_{\text{ext}} = \frac{M_s}{2} \mathbf{e}_z$  dem von den Magneten erzeugten Magnetfeld überlagert.

- Zeichnen Sie qualitativ die Feldlinien des Gesamtmagnetfeldes über dem Streifenmuster ein.
- Markieren Sie die Position die ein punktförmiger Supraleiter über dem Streifenmuster einnehmen würde.
- Markieren Sie die Position die ein punktförmiger Paramagnet über dem Streifenmuster einnehmen würde.

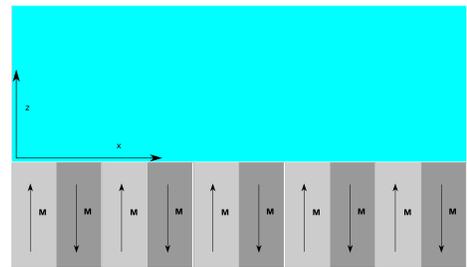


Abbildung 12.8: magnetisches Streifenmuster.

### 12.3.3 Experiment: Unipolarmotor

Unipolargeneratoren oder Unipolarmaschinen sind eine mögliche Quelle für hohe Impulsleistungen, wie sie z. B. bei Hochfeldmagneten oder der *rail-gun* benötigt werden. Diese Maschinen nutzen eine massive leitfähige Kupferscheibe, welche als Schwungrad zur Speicherung von Rotationsenergie dient. Die Kupferscheibe mit Radius  $R$  rotiert in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte  $\mathbf{B}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

Unipolargeneratoren oder Unipolarmaschinen sind eine mögliche Quelle für hohe Impulsleistungen, wie sie z. B. bei Hochfeldmagneten oder der „*rail-gun*“ benötigt werden. Diese Maschinen nutzen eine massive leitfähige Kupferscheibe, welche als Schwungrad zur Speicherung von Rotationsenergie dient. Die Kupferscheibe mit Radius  $R$  rotiert in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte  $\mathbf{B}$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

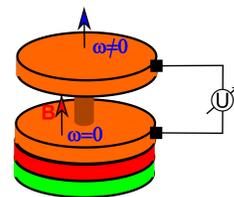


Abbildung 12.9: Eine rotierende und eine nichtrotierende Scheibe im Magnetfeld.

- Wie lautet die konstituierende Gleichung eines bewegten Metalls im Magnetfeld?
- Berechnen Sie das elektrische Feld in der rotierenden und nicht rotierenden Scheibe als Funktion des radialen Abstands von der Achse wenn auf alle freien Ladungsträger keine Gesamtkraft

wirkt.

- Bestimmen Sie die Ladungsdichte aller Ladungsträger als Funktion des Radius.
- Bei welchem Radius ist die Scheibe neutral?
- Welche Spannung fällt zwischen der Achse und dem Außenradius  $R$  ab?
- Welche Leistung wird an den freien Ladungsträgern verrichtet?

Bauen Sie mit einem Seltenerdsmagneten (z.B. S-15-08-N von [www.supermagnete.de](http://www.supermagnete.de)), einer Schraube, Draht und einer 1,5 V Mignon-Batterie (AA) einen Unipolar- oder Homopolar-motor. Sie dürfen auch mehrere Varianten realisieren. Nehmen Sie einen Film auf. Die drei schönsten landen auf der Lernseite.

### 12.3.4 Programmierung: Energiedichte des magnetischen Streifenmusters

Das magnetische Feld des Streifenmusters aus 12.8 schreiben wir als komplexe Zahl. Es beträgt:

$$H_x^p - iH_z^p = \frac{2M}{\pi} \ln \left[ e^{-i\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{Q}{2}(x + iz)\right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4M}{\pi(2n+1)} e^{i(2n+1)Q(x+iz)},$$

wobei  $M$  die Magnetisierung eines Streifens ist, und  $Q = 2\pi/\lambda$  mit der Wellenlänge  $\lambda$  ist. Die Energiedichte im Magnetfeld bei Überlagerung eines externen Magnetfeldes der Form

$$\mathbf{H}_{ext} = H_{ext} \begin{pmatrix} \cos \varphi_{ext} \\ \sin \varphi_{ext} \end{pmatrix}, \quad \varphi_{ext} \in [0, 2\pi]$$

ist

$$U \propto (H_x^p + H_{ext} \cos \varphi_{ext})^2 + (H_z^p + H_{ext} \sin \varphi_{ext})^2.$$

Plotten Sie die Energiedichte des Magnetfeldes bei einer festen Höhe  $z$  als Funktion der  $x$ -Koordinate und als Funktion des Winkels  $\varphi_{ext}$  des externen Feldes. Wie sieht die Trajektorie eines paramagnetischen (diamagnetischen) Partikels aus wenn wir den Winkel  $\varphi_{ext}$  des externen Magnetfeldes von 0 langsam auf  $2\pi$  erhöhen, und den Partikel auf die festgehaltene Höhe zwingen?



# Kapitel 13

## Induktivitäten

In dieser Vorlesung definieren wir die Gegen- und Selbstinduktivitäten von Stromkreisen. Gegeninduktivitäten hängen vom Abstand der Stromkreise ab und fallen mit der minus dritten Potenz des Abstands beider Stromkreise ab wenn der Abstand der Stromkreise groß ist. Zusammen mit den Gegeninduktivitäten bilden die Selbstinduktivitäten eine Matrix, die die elektromotorischen Kräfte mit den Stromänderungen in den Stromkreisen verknüpft. Wir berechnen die Selbstinduktion einer Spule und die Gegeninduktion zweier um den selben Kern gewickelter Spulen. Wir definieren die Kopplungskonstante zweier Spulen und berechnen die Selbstinduktion eines Koaxialkabels. Der Aufbau des Koaxialkabels schützt Signale im Kabel vor Gegeninduktionsströmen äußerer Stromkreise.

### 13.1 Selbst- und Gegeninduktion

Wir hatten in der letzten Vorlesung 12 Induktionseffekte betrachtet die nach einer transienten Zeit zu stationären Stromdichten  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  geführt hatten. Wir wollen hier einer Ansammlung an Stromkreisen eine Matrix, die Induktivität, zuordnen, welche die Reaktion der Stromkreise auf Flussänderungen beschreibt. Wir betrachten zunächst zwei auf den selben Zylinder der Länge  $l$  und Deckfläche  $S_S$  gewickelte Spulen mit Windungszahlen  $N_1$  und  $N_2$  (Abbildung 13.1). Wir wissen aus Vorlesung 8 und 9, dass ein stationärer Strom  $I_1$  in der ersten Spule eine Flussdichte

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{N_1 I_1}{l} \frac{\mathbf{S}_S}{S_S} \quad (13.1)$$

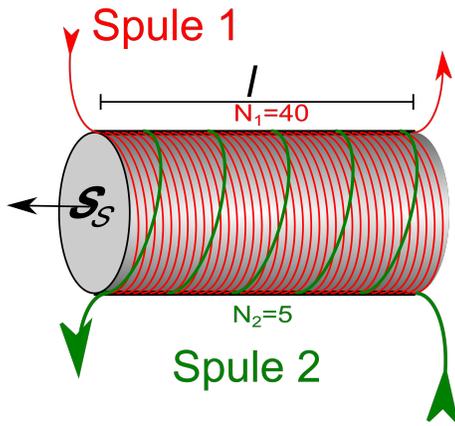


Abbildung 13.1: zwei auf einen Zylinder gewickelte Spulen

erzeugt. Wir integrieren das elektrische Wirbelfeld, welches beim Einschalten des ersten Stromes bewirkt wird, über den Weg des Leiters in Spule 2, um die elektromotorische Kraft in Spule 2 zu bestimmen:

$$\mathcal{EMF}_2 = \oint_{\text{Spule 2}} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{s} = -N_2 \frac{d}{dt} \int_{S_S} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_S \quad (13.2)$$

$$\stackrel{\text{quasistatisch}}{=} -\frac{N_1 N_2 S_S}{\epsilon_0 c^2 l} \frac{dI_1}{dt}. \quad (13.3)$$

Wir definieren die Gegeninduktivität  $M_{21}$ :

$$\mathcal{EMF}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad (13.4)$$

und finden

$$M_{21} = -\frac{N_1 N_2 S_S}{\epsilon_0 c^2 l} \quad (13.5)$$

die Gegeninduktivität zweier aufeinander gewickelter Spulen. Die allgemeine Struktur für Gegeninduktivitäten finden wir, wenn wir eine Anordnung von  $n$  Leiterschleifen, wie in Abbildung 13.2

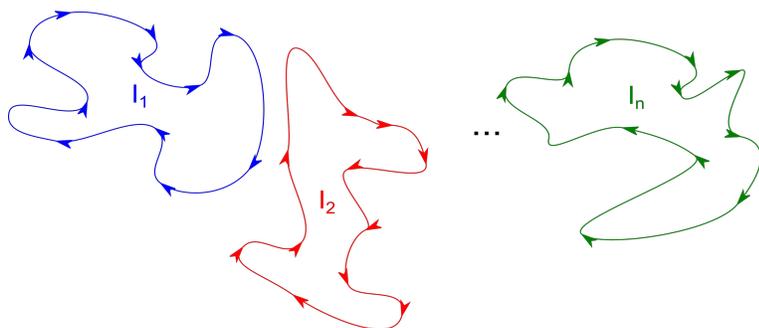


Abbildung 13.2: Viele Stromkreise

dargestellt, betrachten. Die magnetische Flussdichte erhalten wir über das Superpositionsprinzip als Summe der von den Einzelstromkreisen erzeugten Flussdichtefelder.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(I_1) + \mathbf{B}(I_2) + \dots + \mathbf{B}(I_n). \quad (13.6)$$

Die magnetische Energiedichte beträgt dann

$$u(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B}^2 = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left[ \sum_i \left( \frac{\mathbf{B}(I_i)}{I_i} I_i \right) \right]^2 \quad (13.7)$$

$$= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \sum_{i,j} I_i \frac{\mathbf{B}(I_i)}{I_i} \frac{\mathbf{B}(I_j)}{I_j} I_j. \quad (13.8)$$

Wir integrieren die Energiedichte über den gesamten Raum und erhalten die Gesamtenergie

$$U_{ges} = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \sum_{i,j} I_i \left( \int d^3\mathbf{r} \frac{\mathbf{B}(I_i)}{I_i} \frac{\mathbf{B}(I_j)}{I_j} \right) I_j \quad (13.9)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i M_{ij} I_j. \quad (13.10)$$

mit den Induktivitäten

$$M_{ij} = \epsilon_0 c^2 \int d^3\mathbf{r} \frac{\mathbf{B}(I_i)}{I_i} \frac{\mathbf{B}(I_j)}{I_j}, \quad (13.11)$$

die wir im Falle  $i \neq j$  als Gegeninduktivitäten und im Falle  $i = j$  als Selbstinduktivitäten bezeichnen.

Wir leiten einen alternativen Ausdruck für die Gegeninduktivität ab, in dem wir die zu Beginn benutzte Vorgehensweise auf zwei Stromkreise beliebiger Form erweitern: Die durch eine Stromän-

derung im Leiterkreis 1 erzeugte elektromotorische Kraft im Leiter 2 beträgt:

$$\mathcal{EMF}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (13.12)$$

$$= -\frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_{S_2} \quad (13.13)$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{=} -\frac{d}{dt} \oint_{\partial S_2} \mathbf{A}_1 d\mathbf{s}_2, \quad (13.14)$$

wobei  $\mathbf{B}_1$  und  $\mathbf{A}_1$  die von der Leiterschleife 1 erzeugte Flussdichte bzw. das von der Leiterschleife 1 erzeugte Vektorpotenzial ist. Das Vektorpotenzial der Leiterschleife 1 beträgt an der Stelle  $\mathbf{r}_2$  der zweiten Leiterschleife:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_{\partial S_{S_1}} \frac{I_1}{r_{12}} d\mathbf{s}_1, \quad (13.15)$$

weshalb wir für die elektromotorische Kraft der zweiten Leiterschleife den Ausdruck

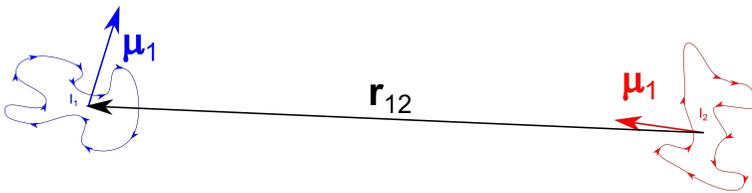
$$\mathcal{EMF}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_{\partial S_{S_1}} \oint_{\partial S_{S_2}} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r_{12}} \frac{dI_1}{dt}, \quad (13.16)$$

und damit die Gegeninduktivität

$$M_{21} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_{\partial S_{S_1}} \oint_{\partial S_{S_2}} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r_{12}}. \quad (13.17)$$

Wir sehen an Gleichung 13.17, dass die Gegeninduktivitäten zweier Stromkreise  $M_{21} = M_{12}$  gleich groß sind. Haben wir zwei Stromkreise mit Dipolmoment  $\boldsymbol{\mu}_1$  ( $\boldsymbol{\mu}_2$ ) und Ströme  $I_1$  ( $I_2$ ), so sind die gegenseitig induzierten elektromotorischen Kräfte

$$\mathcal{EMF}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad \text{und} \quad \mathcal{EMF}_2 = M_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (13.18)$$



**Abbildung 13.3:** Zwei weit separierte Stromkreise in der Punkt dipolapproximation

Wir erhalten eine Vorstellung von der Abhängigkeit der Gegeninduktivität vom Abstand zweier Leiterschleifen, wenn wir beide Stromkreise als Dipole ansehen (Abbildung 13.3). Die Wechselwirkungsenergie im Flussdichte Feld beider Dipole hatten wir als

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \boldsymbol{\mu}_1 \cdot \frac{3\mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{12} - r_{12}^2 \mathbb{1}}{r_{12}^5} \cdot \boldsymbol{\mu}_2 \quad (13.19)$$

berechnet, und wenn wir die Dipolmomente als  $\boldsymbol{\mu}_i = I_i \mathbf{S}_i$  mit Leiterflächenvektor  $\mathbf{S}_i$  schreiben finden wir, dass die Gegeninduktivitäten beider Leiterschleifen für große Abstände durch

$$M_{12} \stackrel{r_{12} \gg \sqrt{S_i}}{\approx} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{S}_1 \cdot \frac{3\mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{12} - r_{12}^2 \mathbb{1}}{r_{12}^5} \cdot \mathbf{S}_2 \quad (13.20)$$

angenähert werden können. Die Gegeninduktivitäten fallen mit der dritten Potenz des Abstandes beider Leiterschleifen ab, wenn ihr Abstand groß im Vergleich zu ihrer Ausdehnung ist.

## 13.2 Selbstinduktion

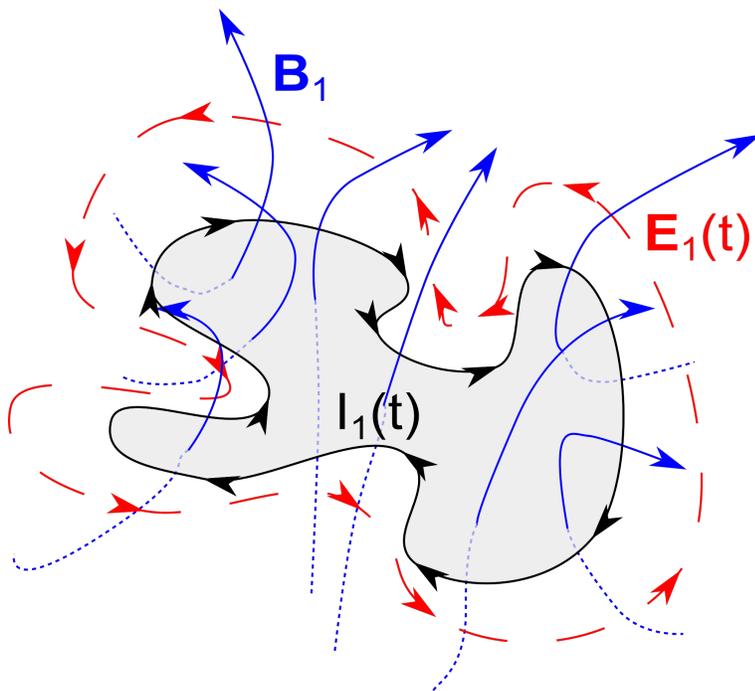


Abbildung 13.4: Flussänderung und elektrisches Wirbelfeld bei Selbstinduktion

Wir betrachten hier den Spezialfall, dass eine Leiterschleife auf sein eigens produziertes Feld reagiert. Im Prinzip unterscheidet sich dieser Fall nicht von der Gegeninduktivität, allerdings divergiert die Selbstinduktivität  $L_i = -M_{ii}$  für unendlich dünne eindimensionale Leiterschleifen und Gleichung 13.17 kann deshalb nicht benutzt werden, bzw. muss an der Stelle  $\mathbf{r}_1(s) \approx \mathbf{r}_2(s')$  regularisiert werden. Dies ist jedoch ausschließlich ein mathematisches Problem der Approximation als unendlich dünner eindimensionaler Leiter. Bereits bei einer Spule die wir als leitende Zylindermantelfläche beschreibt besteht dieses Problem nicht mehr. Wenn wir sowohl Gegeninduktivitäten als auch Selbstinduktivitäten zwischen zwei Leiterschleifen berücksichtigen finden wir die elektromotorischen Kräfte beider Leiterschleifen als

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}\mathcal{M}\mathcal{F}_1 \\ \mathcal{E}\mathcal{M}\mathcal{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dI_1/dt \\ dI_2/dt \end{pmatrix} \quad (13.21)$$

Die elektromotorische Kraft wirkt der Änderung der Ströme entgegen, weshalb wir statt der negativen Größe  $M_{ii}$  die positive Größe  $L_i = -M_{ii}$  als die Selbstinduktivität einer Leiterschleife bezeichnen. Die Matrix der  $M_{ij}$  ist eine negativ definite Matrix.

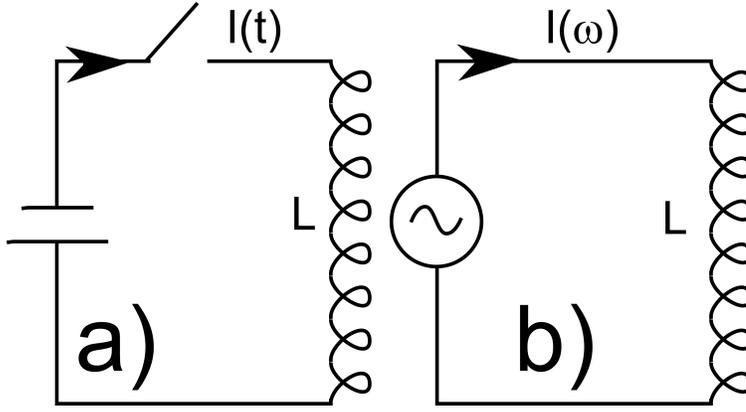


Abbildung 13.5: Getriebene Selbstinduktion

Wenn wir nicht durch eine externe Flussänderung den Strom in einer einzelnen Leiterschleife verändern wollen, sondern das interne Flussdichtefeld verändern wollen müssen wir das durch einen zeitabhängigen Potenzialunterschied, also durch eine Spannungsquelle, bewerkstelligen. Zwei Möglichkeiten sind in Abbildung 13.5 dargestellt. Entweder wir verändern die Stromstärke durch abruptes Einschalten einer Gleichspannungsquelle, oder wir variieren die Stromstärke periodisch mit einer Wechselspannungsquelle.

In beiden Fällen baut die Spannungsquelle in der Spule ein Flussdichtefeld auf. Wieder vergeht zunächst eine transiente Zeit von der Größenordnung  $\tau \approx l/c$ , in der die Flussdichte jedes Stromelements der Spule in den Spuleninnenraum propagiert. Erst wenn Flussdichtefelder von einem Stromelement der Spule zum anderen propagiert sind beginnt sich die Spule über Selbstinduktion gegen die Spannungsquelle zu wehren und begrenzt die Rate, mit welcher der Strom sich verändern kann, indem es eine elektromotorische Kraft längs des Spulenweges aufbaut die die externe Spannungsquelle kompensiert.

$$0 = V + \mathcal{E} \mathcal{M} \mathcal{F} = V + L \frac{dI}{dt} \quad (13.22)$$

Die Leistung der Spannungsquelle an der Spule beträgt dann

$$P = \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = VI = LI \frac{dI}{dt} \quad (13.23)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} LI^2 \right) = \frac{d}{dt} U_B, \quad (13.24)$$

wobei  $U_B$  die im Magnetfeld der Spule gespeicherte Feldenergie ist. Für zwei Spulen ist die Feldenergie

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & -M_{12} \\ -M_{21} & L_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (13.25)$$

Die Feldenergie muss positiv sein, womit die Matrix  $-\mathbf{M}$  positiv definit sein, was bedeutet, dass die Diagonalelemente  $L_1, L_2 > 0$  und die Determinante der Matrix  $\det(-M) > 0$  positiv sein müssen. Wir finden

$$L_1, L_2 > 0 \quad \text{und} \quad L_1 L_2 > M_{12}^2 \quad (13.26)$$

Anstatt der Gegeninduktivitäten benutzt man bei einem Transformator (einer Anordnung aus zwei gekoppelten Spulen) die Kopplungskonstante

$$M_{12} := k \sqrt{L_1 L_2} \quad (13.27)$$

$$-1 < k < 1 \quad (13.28)$$

die dann Werte vom Betrag kleiner als eins annimmt. Zwei Spulen mit  $k \approx 0$  sind zwei nicht gekoppelte Spulen, zwei Spulen mit  $k \approx 1$  sind stark gekoppelte aber entgegengesetzt gewickelte Spulen und zwei Spulen mit  $k \approx -1$  sind stark gekoppelte gleichartig gewickelte Spulen.

### 13.2.1 Selbstinduktion einer zylindrischen Spule

Die in einer Spule gespeicherte Feldenergie beträgt

$$U_B = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} B^2 V_{Spule} \quad (13.29)$$

$$= \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left( \frac{nI}{\epsilon_0 c^2} \right)^2 \pi R^2 l \quad (13.30)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi R^2 l n^2}{\epsilon_0 c^2} I^2 \quad (13.31)$$

$$= \frac{1}{2} L I^2, \quad (13.32)$$

und wir finden die Selbstinduktivität einer zylindrisch gewickelten Spule:

$$L = \frac{\pi R^2 l n^2}{\epsilon_0 c^2}. \quad (13.33)$$

### 13.2.2 Selbstinduktion eines Koaxialkabels

Wir betrachten ein Koaxialkabel aus einem zentralen zylindrischen Metall des Radius  $a$  der von einem zweiten metallischen Zylinder mit Radius  $b$  umgeben ist, so wie in Abbildung 13.6 dargestellt. In beiden Metallen fließe ein Strom  $I$  jeweils in entgegengesetzte Richtungen. Dann gibt es im Außenraum des Koaxialkabels keine elektromagnetischen Felder. Im Zwischenraum bildet sich eine magnetische Flussdichte aus, die sich wie bei einem unendlich dünnen Leiter auch um den Leiter wickelt.

$$\mathbf{B} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 \rho} \mathbf{e}_\phi \quad (13.34)$$

Diese magnetische Flussdichte greift durch eine gedachte Fläche  $S$  des Koaxialkabels die wir senkrecht zu  $\mathbf{e}_\phi$  so in das Koaxialkabel einpassen, dass sie vom Innenradius  $a$  zum Außenradius  $b$  radial nach außen verläuft und entlang einer Länge  $s$  entlang der  $z$ -Richtung. Der Fluss durch diese Fläche beträgt

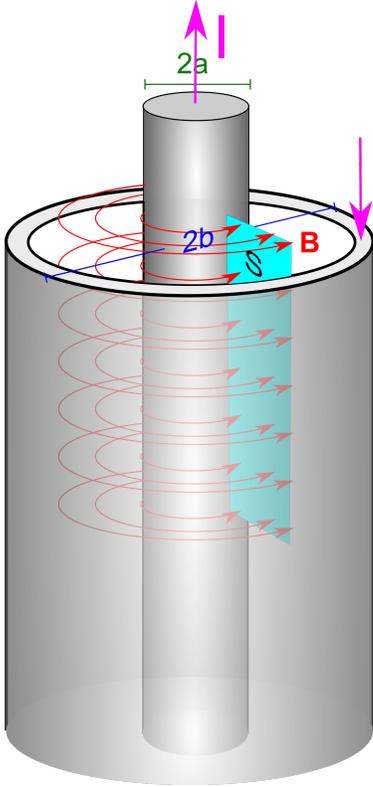


Abbildung 13.6: Zur Selbstinduktion eines Koaxialkabels

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\phi dS = \int_{z_0}^{z_0+s} dz \int_a^b d\rho \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 \rho} \quad (13.35)$$

$$= \frac{Is}{2\pi\epsilon_0 c^2} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \quad (13.36)$$

$$= \frac{Is}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (13.37)$$

Um eine Änderung des magnetischen Flusses zwischen beiden Metallen zu bewirken müssen wir eine externe Spannung anlegen, die die elektromotorische Kraft aufhebt

$$V = -\mathcal{E}\mathcal{M}\mathcal{F} = +\frac{d\Phi}{dt} = \frac{s}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{dI}{dt} = L \frac{dI}{dt}, \quad (13.38)$$

woraus wir folgern, dass ein Koaxialkabel die Selbstinduktivität von

$$\frac{dL}{ds} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (13.39)$$

pro Länge  $s$  des Kabels besitzt. Wir haben bei der Ableitung nicht verraten in welche Richtung das elektrische Wirbelfeld zeigt. Da die Feldlinien des Wirbelfeldes nicht an Ladungen festgezurr sind, ist es leicht festzustellen, dass die elektrische Feldlinien entlang der  $z$ -Richtung verlaufen.



## Kapitel 14

# Elektrisch leitende Materialien

In dieser Vorlesung definieren wir die dynamische konstituierende Gleichung eines Metalls und geben mikroskopische Erklärungen für das Verhalten des Ohmschen Gesetzes in verschiedenen leitenden Materialien. Wir stellen wichtige Erweiterungen des Ohmschen Gesetzes für Materialien in Temperaturgradienten und in magnetischen Feldern vor, die zu wichtigen Bauelementen führen.

## 14.1 Ideales Metall und das Ohmsche Gesetz

Wir hatten in der Vorlesung 3 die statische konstituierende Gleichung eines idealen Metalls  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  besprochen und bereits in Vorlesung 12 gesehen, dass diese im dynamischen Fall, zum Beispiel wenn sich in einer metallischen Leiterschleife der magnetische Fluss ändert, diese Gleichung die Realität nicht mehr wiedergeben kann. Die dynamische konstituierende Gleichung eines idealen Metalls ist das Ohmsche Gesetz:

$$\mathbf{j}(t) = \int_0^t \sigma(t-t') \mathbf{E}(t') dt'. \quad (14.1)$$

Die Stromdichte ist proportional dem elektrischen Feld und reagiert eventuell etwas zeitverzögert auf elektrische Felder, die bereits in der Vergangenheit liegen. Die Größe  $\sigma(t)$  bezeichnen wir als die dynamische Leitfähigkeit. Wenn die Änderungen des elektrischen Feldes langsam gegenüber dem Gedächtnis des Materials sind  $|d\mathbf{E}/dt| \ll |\mathbf{E}/\tau|$  können wir die dynamische Leitfähigkeit durch eine vergessliche Leitfähigkeit

$$\sigma(t) \approx \sigma_0 \delta(t) \quad (14.2)$$

mit der statischen Leitfähigkeit  $\sigma_0$  approximieren. Dann lautet das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{j}(t) = \sigma_0 \mathbf{E}(t). \quad (14.3)$$

Im statischen Fall fließen im Metall keine Ströme  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ , und es folgt sofort die bereits bekannte statische konstituierende Gleichung eines idealen Metalls  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ . Wir betrachten ein Stück Metall mit Querschnitt  $A$  der Länge  $l$  durch das längs der Bogenlänge des Leiters ein Strom fließt und integrieren das Ohmsche Gesetz über das Volumen:

$$\sigma_0 V A = \underbrace{\sigma_0 \int_V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}_V dA = \sigma_0 \int \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{ds} d^3\mathbf{r} \stackrel{\text{Ohmsches Gesetz}}{=} \int \mathbf{j} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{ds} d^3\mathbf{r} = \underbrace{\int \mathbf{j} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{ds} dA}_{I} ds = lI \quad (14.4)$$

und finden so

$$I = \frac{\sigma_0 A}{l} V = \frac{1}{R} V \quad (14.5)$$

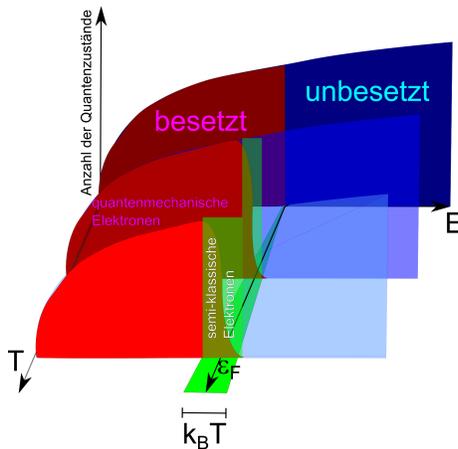
mit dem Widerstand

$$R = \frac{l}{\sigma_0 A} \quad (14.6)$$

Der Widerstand ist eine integrale Größe eines Stückes Metalls, die für die Anwendung in der Elektronik wichtig ist und sich zusammensetzt aus den physikalischen Eigenschaften, der Leitfähigkeit, des Materials und den geometrischen Abmessungen des spezifisch benutzten Stückes Metall. Den Physiker interessiert mehr die Materialeigenschaft, die Leitfähigkeit, bzw. die physikalischen Prozesse, die einen bestimmten Wert der Leitfähigkeit bewirken. Dazu brauchen wir ein mikroskopisches Verständnis der physikalischen Prozesse, die zur Leitfähigkeit führen

## 14.2 Mikroskopisches Verständnis des Ohmschen Gesetzes

Wenn wir Elektronen in einem Metall bewegen wollen ist es wichtig, sich die Größenordnungen der elektrischen Felder klar zu machen. Typische externe elektrische Felder, mit denen wir den Stromfluß bewirken sind von der Größenordnungen  $E_{ext} \sim V/m$ . In den Metallen sind positive Atomkerne, deren Coulombfeld im Abstand von wenigen Angström (die Größenordnung des Bohrradius aus Vorlesung 6) von der Größenordnung  $E_{int} \sim V/\text{\AA} = 10^{10}V/m$  sind. Das externe Feld ist typischerweise um 10 Größenordnungen kleiner als die internen elektrischen Felder. Es ist deshalb so, dass das externe Feld praktisch nicht in der Lage ist irgendetwas an den möglichen Quantenzuständen (Elektronen sind quantenmechanische Teilchen) der Elektronen zu ändern.



**Abbildung 14.1:** Je höher die Temperatur ist umso mehr semi-klassische Elektronen können sowohl stoßen als auch beschleunigt werden.

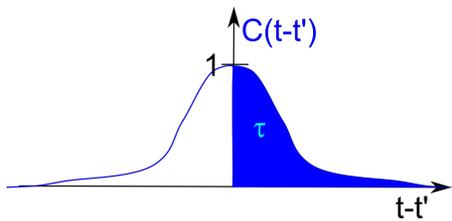
In Abbildung 14.1 haben wir die Anzahl der Quantenzustände, die ein Elektron im Metall einnehmen kann gegenüber der Energie aufgetragen. Elektronen gehören zu den Fermionen, den Quantenteilchen, die sich in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden müssen. Aufgrund dieses Individualistencharakteristikums, verwehrt ein Elektron den anderen Elektronen die Besetzung eines von ihm bereits besetzten Quantenzustands. Trotz der Anziehung durch die Atome ist es einem einzelnen Elektron relativ egal bei welchem Atom des Metalls es vorbei schwirrt, so dass die Elektronenquantenzustände einfach durch die Quantenzahl des kinetischen Impulse  $\mathbf{p}$ , bzw. ihrer ballistischen Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m_e$  charakterisiert werden kann. Die Quantenzustände kann man sich also als ballistische Elektronen, die mit konstanter Geschwindigkeit durch das Metall fliegen vorstellen. Dieses Bild sieht zunächst komisch aus, denn wir wissen ja, dass im Metall bei Fehlen eines externen elektrischen Feldes kein Stromfluß messbar ist. Wir müssen also zunächst erklären warum das Metall ohne externes Feld stromfrei ist. Die Energie der ballistischen Elektronen ist  $E = p^2/2m$  ihre kinetische Energie. Der am liebsten besetzte Quantenzustand ist damit, der eines ruhenden Elektrons. Beachten Sie, dass wegen der Unschärferelation wir nicht sagen können wo das Elektron ruht, es ist über das ganze Metall delokalisiert. Die nächstbeliebtesten Zustände sind die, mit niedriger Geschwindigkeit. Ein Elektronenquantenzustand zur Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_1$  hat dieselbe Energie wie ein Elektron mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$ , so dass die eine Geschwindigkeitsrichtung genauso beliebt ist wie die entgegengesetzte. Die Elektronen besetzen also Quantenzustände die möglichst niedrige

Energie haben. Wir können ein Metall aufladen, was beweist, dass es mehr mögliche Quantenzustände gibt, als besetzt sind. Wenn die Elektronenanzahl so ist, dass die Atomladung neutralisiert wird und wir das Metall zum absoluten Nullpunkt der Temperatur gekühlt haben sind alle Zustände mit Energie niedriger als die Fermienergie  $\epsilon_F$  besetzt und alle Zustände darüber unbesetzt. Elektronen mit entgegengesetzter ballistischer Geschwindigkeit kompensieren sich gegenseitig, so dass die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen verschwindet.

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0} \quad (14.7)$$

Sind wir bei einer endlichen Temperatur können die Elektronen durch Stöße thermische Energie gewinnen oder verlieren. Da es aber nur für Elektronen mit der Energie  $\epsilon_F \pm k_B T$  ( $k_B$  die Boltzmannkonstante) freie derartige Quantenzustände gibt verteilen sich bei endlicher Temperatur nur die Elektronen nahe der Fermikante so um, so dass es nur im Energiebereich  $\epsilon_F \pm k_B T$  sowohl besetzte als auch unbesetzte Elektronenquantenzustände gibt. Der Rest der entarteten Elektronen ist zum Verbleib in seinem bequemen Quantenzustand verdonnert und kann weder stoßen noch durch ein externes Feld beschleunigt werden. Beachten Sie dabei, dass nur Elektronen die stoßen können auch durch externe elektrische Felder beschleunigt werden können. Die Elektronen im Bereich  $\epsilon_F \pm k_B T$  sind nicht durch Fermionische Quanteneffekte behindert, und wir können diesen Bruchteil der Elektronen als semi-klassische Elektronen behandeln. Die Anzahldichte dieser semi-klassischen Elektronen hängt von der Temperatur ab und ist in etwa die Zustandsdichte  $\nu(\epsilon_F)$  an der Fermikante multipliziert mit der Energiebreite  $k_B T$  der semi-klassischen Elektronen  $n_{e-,skl} = k_B T \nu(\epsilon_F)$ . Beachten Sie also, dass im Gegensatz zur Gesamtanzahl der Elektronen, die erhalten ist, sich die Anzahl der semi-klassischen Elektronen mit der Temperatur verändert.

Bei Zimmertemperatur sind die Hauptstoßpartner der semi-klassischen Elektronen Phononen, die quantisierte atomare Gitterschwingungen der typischen Frequenz  $\omega_D$  sind ( $\omega_D$  bezeichnet man als die Debyefrequenz). Phononen sind Quantenteilchen, die zu den Bosonen gehören und im Gegensatz zu den Fermionen mit Vorliebe solche Quantenzustände besetzten, die bereits besetzt sind, sofern die zur Verfügung stehende Energie dafür bereit steht. Bei Zimmertemperatur steht soviel Energie zur Verfügung, dass alle Phononen dem quantenmechanischen Herdentrieb frönen können und die Phononenzustände mit durchschnittlich  $n_{phon} \propto k_B T / \hbar \omega_D$  Phononen besetzt sind, so dass die Phononendichte quantenmechanischer Phononen, wie die Dichte der semi-klassischen Elektronen auch proportional der Temperatur sind  $n_{phon} \propto T$ . Die Zeit  $\tau$  die ein Elektron braucht um zu stoßen sehen wir am besten an der Geschwindigkeitsautokorrelationsfunktion



**Abbildung 14.2:** Die Stoßzeit misst man als Fläche unter der Geschwindigkeitsautokorrelationsfunktion der Elektronen.

$$C(t-t') = \frac{\frac{1}{2} m_e \langle \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t') \rangle}{\frac{3}{2} k_B T}, \quad (14.8)$$

die wir in Abbildung 14.2 schematisch als Funktion der Zeit aufgetragen haben. Da das Elektron im thermischen Mittelwert pro Bewegungsrichtung die kinetische Energie  $1/2m_e v_x^2 = 1/2m_e v_y^2 = 1/2m_e v_z^2 = 1/2k_B T$  besitzt, hat  $C(t - t' = 0)$  den Wert  $C(0) = 1$ . Später, zur Zeit  $t \gg t'$  ist das Elektron immer noch thermisch, aber seine Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t)$  ist nicht mehr korreliert mit der vorherigen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t')$ , so dass die eine Geschwindigkeit genauso oft parallel wie antiparallel zur ursprünglichen Geschwindigkeit zeigt. Die Fläche unter der Korrelationsfunktion

$$\tau = \frac{m_e}{3k_B T} \int_{t'}^{\infty} dt \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t') \quad (14.9)$$

ist unsere Stoßzeit. Die Geschwindigkeitskorrelationen sind umgekehrt proportional zur Anzahl der mit dem Elektron stoßenden Phononen  $\langle \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t') \rangle \propto n_{Phon}^{-1}$ . Die Korrelationen fallen um so schneller mit der Zeit ab je mehr Phononen da sind. Wir finden so, dass die Stoßzeit  $\tau \propto T^{-1} n_{Phon}^{-1}$  umgekehrt proportional zum Produkt aus Temperatur mit der Phononzahl ist.

Die Stromdichte der Elektronen könne wir schreiben als

$$\mathbf{j} = -en_{e-,quant} \mathbf{v}_{e-,quant} - en_{e-,skl} \mathbf{v}_{e-,skl} \quad (14.10)$$

wobei die quantenmechanischen und semi-klassischen Elektronen die Bewegungsgleichungen

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_{e-,quant}}{dt} = 0 \quad (14.11)$$

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_{e-,skl}}{dt} = -e\mathbf{E} \quad \text{zwischen zwei Stößen} \quad (14.12)$$

mit den Lösungen

$$\mathbf{v}_{e-,quant}(t) = \mathbf{v}_{e-,quant}^i \quad (14.13)$$

$$\mathbf{v}_{e-,skl}(t) = \mathbf{v}_{e-,skl}^i - \frac{e\mathbf{E}}{m_e} t \quad \text{zwischen zwei Stößen} \quad (14.14)$$

erfüllen, wobei die  $\mathbf{v}^i$  die festen Geschwindigkeiten der Quantenelektronen bzw. die Geschwindigkeiten der semi-klassischen Elektronen nach einem Stoß bezeichnen. Der Mittelwert der Geschwindigkeit beider Sorten an Elektronen verschwindet aus Symmetriegründen und der Mittelwert der Zeit, welche semi-klassische Elektronen zwischen zwei Stößen verbringen ist die inverse Stoßrate  $1/\tau^{-1} = \tau$ . Die Stromdichte der Elektronen beträgt also

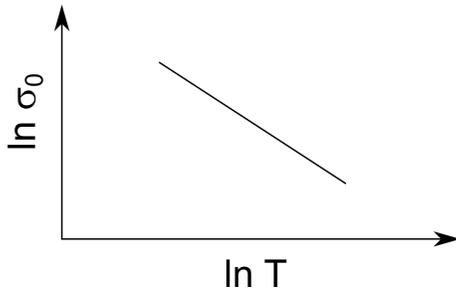
$$\langle \mathbf{j} \rangle = -en_{e-,quant} \langle \mathbf{v}_{e-,quant}^i \rangle - en_{e-,skl} \langle \mathbf{v}_{e-,skl}^i \rangle + \frac{n_{e-,skl} e^2 \mathbf{E}}{m_e} \langle t \rangle \quad (14.15)$$

$$= \frac{n_{e-,skl} e^2 \mathbf{E}}{m_e} \tau \propto n_{e-,skl} n_{Phon}^{-1} T^{-1} \propto T^{-1} \quad (14.16)$$

An Gleichung 14.15 sehen wir, dass die Stromdichte tatsächlich ein Ohmsches Gesetz ohne Gedächtnis erfüllt, und dass die Leitfähigkeit eines Metalls bei Zimmertemperatur

$$\sigma_0 \propto n_{e-,skl} n_{Phon}^{-1} T^{-1} \propto T^{-1} \quad (14.17)$$

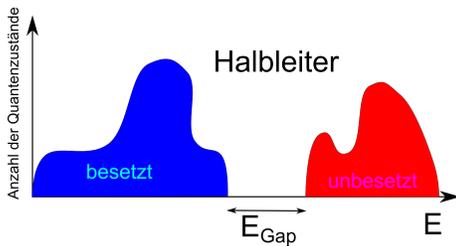
mit der Temperatur sinkt, weil sich immer mehr Gitterschwingungsquanten im Metall den Elektronen in den Weg stellen und diese thermalisieren.



**Abbildung 14.3:** Leitfähigkeit von Metall als Funktion der Temperatur (doppelt logarithmische Auftragung)

Wenn das Metall kein reines kristallines Metall ist, sondern eine Legierung aus zwei Sorten von Metallatomen so stoßen die Elektronen an der sich durch die zufällige Verteilung beider Atomsorten ergebenden Unordnung und die Leitfähigkeit ist proportional zu  $\sigma_0 \propto n_{e-,skl} T^{-1} n_{Unordnung}^{-1}$ , wobei  $n_{Unordnung}$  die temperaturunabhängige Unordnungsdichte ist. In diesem Fall wird die Leitfähigkeit temperaturunabhängig. Konstantan ist eine Legierung, die zum Bau von Widerständen benutzt wird um die Widerstände temperaturunabhängig zu machen. Melanie Kummer und Thomas Dabisch haben auf dem E-Learning ein Experiment platziert in dem der Strom durch reine Metalle, durch Konstantan, und durch einen dotierten Halbleiter als Funktion der Temperatur bei konstanter Spannung gemessen wird.

### 14.3 Ohmsches Gesetz für Halbleiter



**Abbildung 14.4:** Anzahl der Quantenzustände von Elektronen in einem Halbleiter.

Halbleiter sind Materialien bei der die Zustandsdichte der Quantenzustände eine Lücke als Funktion der Energie besitzt und beim absoluten Nullpunkt der Temperatur alle Zustände unterhalb der Lücke (im Valenzband) mit quantenmechanischen Elektronen besetzt sind während die Zustände oberhalb der Lücke (das Leitungsband) unbesetzt ist. Die Energielücke ist so groß, dass auch bei Zimmertemperatur die Breite der Lücke groß im Vergleich zur thermischen Energie ist:

$$E_{gap} \gg k_B T \quad (14.18)$$

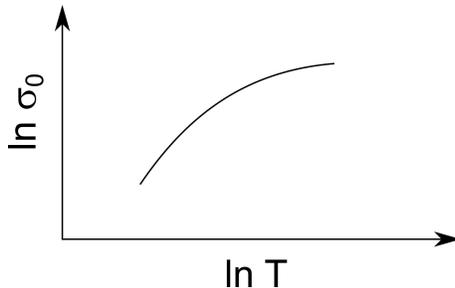
Die Anzahldichte  $n_{e-,c}$  der Elektronen im Leitungsband ist nicht, wie bei den semi-klassischen

Elektronen eines Metalls proportional der Temperatur, sondern sie folgt der klassischen Boltzmannstatistik.

$$n_{e-,c} \propto e^{-E_{gap}/k_B T} \quad (14.19)$$

Wir finden für die Leitfähigkeit eines Halbleiters die Beziehung

$$\sigma \propto n_{e-,c} n_{Phon}^{-1} T^{-1} \propto e^{-E_{gap}/k_B T} T^{-2}. \quad (14.20)$$



**Abbildung 14.5:** Leitfähigkeit eines Halbleiters als Funktion der Temperatur (doppelt logarithmische Auftragung)

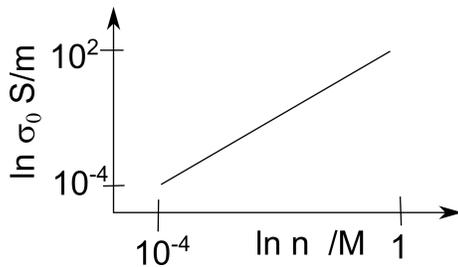
Der exponentielle Term dominiert die Leitfähigkeit, so dass die Leitfähigkeit eines Halbleiters mit der Temperatur steigt, weil es wesentlich einfacher wird Elektronen ins Leitungsband thermisch anzuregen und die zunehmende Behinderung der Elektronen durch Gitterschwingungen diesen Effekt nicht aufheben kann.

## 14.4 Elektrolyte

Salze dissoziieren in einem polaren Lösungsmittel in positive **Ka+**ionen und negative **An<sup>egativ</sup>**ionen und tragen dann zum Stromtransport bei. Wir haben in Vorlesung 6 gelernt, dass sich Ionen mit einer Gegenionenwolke der Dicke der Debye-Länge umgeben und von weit weg betrachtet neutral erscheinen. Trotzdem bewegt sich ein Ion im externen elektrischen Feld, indem es selbst in die eine Richtung wandert, seine Gegenionenwolke mit stets neuen Gegenionen an der Front der Wolke füttert, und am Heck der Wolke die Gegenionen die Wolke verlassen lässt. Man kann die Leitfähigkeit schreiben als

$$\sigma_0 = e(n_+ z_+ \mu_+ + n_- z_- \mu_-), \quad (14.21)$$

wobei  $\mu = \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} / E^2$  die Beweglichkeit  $\pm \mu_{\pm} > 0$  der Ionen beschreibt,  $\pm z_{\pm} > 0$  die Valenz der Ionen und  $n_{\pm}$  die Ionenkonzentrationen. Die Leitfähigkeit steigt mit der Konzentration des Salzes in der Lösung stark an und Thomas hat einen Film auf die E-Learning site gestellt, bei dem man den Anstieg des Stromes mit dem Salzgehalt des Wassers beobachten kann. Obwohl das Bild eines gezogenen geladenen Ions eigentlich nicht richtig passt, kann die Beweglichkeit der Ionen in Wasser relativ gut durch ein hydrodynamisches Modell beschrieben werden, dass die Gegenionenwolke vollkommen außer Acht lässt und das Ion als geladene ungeschirmte Kugel betrachtet, die der

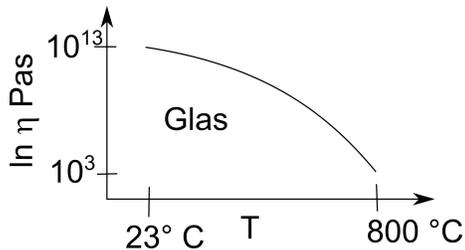


**Abbildung 14.6:** Leitfähigkeit eines Elektrolyten als Funktion der Ionenkonzentration (doppelt logarithmische Auftragung)

elektrischen Kraft die hydrodynamische Stokesreibungskraft entgegensetzt:

$$|\mu| = |v/E| = \frac{q}{6\pi\eta r_0}. \quad (14.22)$$

Hierbei bezeichnen  $\eta = 10^{-3} \text{Pas}$  die Viskosität des Wassers und  $r_0 \approx 10^{-10} \text{m}$  den hydrodynamischen Ionenradius. Man kann die Bewegung der Ionen bei farbigen Ionen z.B.  $\text{CuSO}_4$  leicht sichtbar machen.



**Abbildung 14.7:** Viskosität von Glas als Funktion der Temperatur macht Glas bei hohen Temperaturen zu einem Leiter

Die Formel funktioniert auch für Glas, das eine Flüssigkeit ist, bei der wir die Viskosität um 10 Größenordnungen variieren können. Bei hohen Temperaturen wird Glas niederviskos und deshalb leitfähig. Thomas hat auf dem E-Learning einen Versuch gefilmt, bei dem ein Glasstab an eine Starkstromquelle angeschlossen wird. Wenn man den Glasstab erhitzt, wird das Glas so leitfähig, dass die Dissipation der elektrischen Energie ausreicht den Glasstab noch weiter zu erhitzen und das Glas birst.

## 14.5 Zusammenspiel von elektrischem und Wärmestrom in Metallen

Bei endlicher Temperatur ist ein Metallelektron nicht nur geladen, sondern es hat auch durch seine sich zufällig über Stöße ständig ändernde kinetische Energie die Möglichkeit Wärme aufzunehmen und abzugeben. Wird ein Elektron von A nach B transportiert, so wird sowohl Ladung als auch

kinetische Energie mittransportiert. Dies ist der Grund warum die elektrische und die Wärmeleitfähigkeit in Metallen eng miteinander verknüpft sind. Das Verhältnis von elektrischer Stromdichte  $\mathbf{j}$  und Wärmestromdichte  $\mathbf{j}_Q$  kann durch das Wiedemann Franzsche Gesetz

$$k_B T \mathbf{j} = e \mathbf{j}_Q \quad (14.23)$$

in Metallen gut beschrieben werden, weil in Metallen die Elektronen die dominanten Ladungs und Wärme Transporteure sind.

Wir betrachten ein Metall welches an zwei Enden auf verschiedenen Temperaturen gehalten wird, so dass im Metall ein Temperaturgradient besteht, der die Elektronen drängt vom warmen Ende zum kalten Ende zu fließen. Wirkt in dem Metall zusätzlich ein elektrisches Feld so müssen wir das Ohmsche Gesetz erweitern zu

$$\mathbf{j} = \underbrace{\sigma_0 \mathbf{E}}_{\text{energetische Kraft}} - \underbrace{L_{12} \nabla T}_{\text{stochastische Kraft}} \quad (14.24)$$

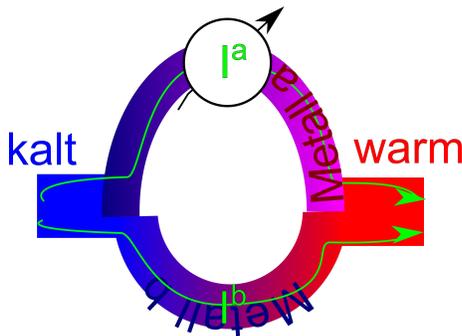
Das elektrische Feld versucht die Elektronen in eine energetisch günstigere Position zu bewegen, während die schnelleren Elektronen aus den warmen Bereichen mit höherer Wahrscheinlichkeit in Richtung kaltes Ende gestoßen werden als die langsameren Elektronen in den warmen Bereich.

Wenn sich ein Gleichgewichtszustand, bei dem der Stromfluß zum Erliegen kommt einstellt, weil die Elektronenladungsverteilung so wird, dass das Metall nicht mehr an allen Stellen neutral ist, halten energetische und stochastische Kraft sich die Waage und es gilt

$$\mathbf{E} = \frac{L_{12}}{\sigma_0} \nabla T \quad (14.25)$$

bzw. nach Aufintegration des elektrischen Feldes von einem zum anderen Ende

$$V = \frac{L_{12}}{\sigma_0} \Delta T. \quad (14.26)$$



**Abbildung 14.8:** Messung des Temperaturunterschieds mit einem Thermostromelement

Die Spannung  $V$  bezeichnet man als Thermospannung. Die Spannung können wir aber nicht messen, da ja kein Stromfluß durch sie verursacht wird. Um Thermospannungen messen zu können brauchen wir zwei verschiedene Metalle. Wir schalten zwei Metalle  $i = a, b$  der Längen  $l^i$  und der Querschnitte  $A^i$  parallel, so wie in Abbildung 14.8 dargestellt, setzen beide demselben Temperaturunterschied  $\Delta T$  aus, und messen den Thermostrom durch nur eines der Metalle. In beiden Metallen gilt

$$l^i I^i = \int \mathbf{j}^i \cdot \frac{d\mathbf{s}^i}{ds^i} d^3\mathbf{r}^i = \sigma_0^i \int \mathbf{E}^i \cdot d\mathbf{s}^i d^2A^i - L_{12}^i \int \nabla T \cdot d\mathbf{s}^i d^2A^i = \sigma_0^i V A^i - L_{12}^i \Delta T A^i \quad (14.27)$$

Im Gleichgewicht muss der Thermostrom im ersten Metall (a) durch einen entgegengesetzten Thermostrom im anderen Metall (b) kompensiert werden:

$$I^a + I^b = 0 \quad (14.28)$$

und es liegt deshalb eine Thermospannung von

$$V = \frac{L_{12}^a A^a l^b + L_{12}^b A^b l^a}{\sigma_0^a A^a l^b + \sigma_0^b A^b l^a} \Delta T \quad (14.29)$$

zwischen dem heißen und kalten Enden an. Diese Thermospannung bewirkt im Metall (a) einen Strom von

$$I^a / A^a = \sigma_0^a \frac{L_{12}^a A^a l^b + L_{12}^b A^b l^a}{(\sigma_0^a A^a l^b + \sigma_0^b A^b l^a)} \frac{\Delta T}{l^a} - L_{12}^a \frac{(\sigma_0^a A^a l^b + \sigma_0^b A^b l^a)}{(\sigma_0^a A^a l^b + \sigma_0^b A^b l^a)} \frac{\Delta T}{l^a} \quad (14.30)$$

$$= \frac{\sigma_0^a L_{12}^b - \sigma_0^b L_{12}^a}{(\sigma_0^a A^a l^b + \sigma_0^b A^b l^a)} A^b \Delta T \quad (14.31)$$

Wir erkennen an Gleichung 14.31, dass der Thermostrom verschwindet, wenn die Materialien gleich sind ( $\sigma_0^a L_{12}^b = \sigma_0^b L_{12}^a$ ). Sind die Materialien verschieden, so fließt durch das Metall (a) ein messbarer Thermostrom der dem Temperaturunterschied proportional ist und deshalb zum Messen von Temperaturunterschieden benutzt werden kann.

## 14.6 Hall Effekt

Die bisherige Form des Ohmschen Gesetzes ist nicht Lorentzinvariant. Wir erhalten eine Lorentzinvariante Formulierung, wenn wir neben den Coulombkräften auch die Lorentzkräfte, die ja auf bewegte Ladungen wirken, berücksichtigen. Damit wird das generalisierte Ohmsche Gesetz zu

$$\mathbf{j} = \sigma_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (14.32)$$

$$= \sigma_0 \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{nq} \times \mathbf{B} \right). \quad (14.33)$$

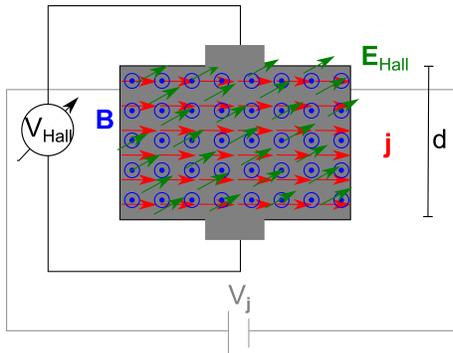
Wir lösen Gleichung 14.33 nach dem elektrischen Feld auf

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma_0} - \frac{\mathbf{j}}{nq} \times \mathbf{B} = \left( \frac{1}{\sigma_0} \mathbb{1} + \frac{\mathbf{B} \times \mathbb{1}}{nq} \right) \cdot \mathbf{j}, \quad (14.34)$$

und sehen, dass neben dem elektrischen Feld  $E_j = \mathbf{j}/\sigma_0$  entlang des Stromflusses ein Hallfeld  $\mathbf{E}_{Hall} = -\mathbf{j} \times \mathbf{B}/nq$  senkrecht zur Stromrichtung und senkrecht zur magnetischen Flussdichte gibt. Wir berechnen die Leistungsdichte der beiden elektrischen Felder an der stromführenden Materie

$$p_j = \frac{j^2}{\sigma_0} \quad (14.35)$$

$$p_{Hall} = - \left( \frac{\mathbf{j}}{nq} \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (14.36)$$



**Abbildung 14.9:** Messung der Hallspannung. Welches Vorzeichen haben die Ladungsträger?

und erkennen, dass der spezifische Widerstand  $\sigma_0^{-1} \mathbb{1}$  zur Dissipation von Energie im Material führt, während der spezifische Hallwiderstand  $\mathbf{B} \times \mathbb{1}/nq$  ein dissipationsfreier spezifischer Widerstand ist. Ein wichtiger Umstand des Hallfeldes  $\mathbf{E}_{Hall}$  ist es, dass dieses vom Vorzeichen der Ladung  $q$  der den Strom produzierenden Partikel ist, und sich deshalb feststellen lässt, dass die strömenden Partikel negative Elektronen, positive Löcher oder auch andere geladenen Teilchen sind. Wir können mit Experimenten, die bei endlicher magnetischer Flussdichte durchgeführt werden die Ladungsdichte  $\rho = nq$  der strömenden Ladungen inklusive ihres Vorzeichens messen. In der Standardgeometrie Abbildung 14.9 erzwingt man eine Strom entlang der  $x$ -Richtung durch eine entlang der  $y$ -Richtung orientierten Flussdichte und fasst das entlang der  $z$ -Richtung integrierte elektrische Hallfeld als Hallspannung  $U_{Hall} = \int_0^d \mathbf{E}_{Hall} \cdot \mathbf{e}_z ds$  an der Probe der Dicke  $d$  ab.

## 14.7 Übungen

### 14.7.1 Selbstinduktivität eines Ringes

Berechnen Sie die Selbstinduktivität eines unendlich dünnen zylindrischen Leiterringes vom Radius  $R$  der Höhe  $h$ . Zeigen Sie, dass für  $h \gg R$  das Ergebnis mit der Selbstinduktion einer Spule übereinstimmt. Wie verhält sich die Selbstinduktivität im umgekehrten Fall  $h \ll R$ ?

*Hinweis:* Die auftretenden Integrale führen auf spezielle Funktionen, die in den einschlägigen Mathematikprogrammen (Mathematika, Maple, Maxima,..) implementiert bzw. in den Integraltafeln Gradshteyn-Ryzhik, bzw. Abramowitz-Stegun definiert sind. (Vorsicht, die Konventionen für diese Funktionen unterscheiden sich in den verschiedenen Programmen und Tafeln.

Wenn Sie schon gerade dabei sind berechnen Sie das Vektorpotenzial eines Ringstromes vom Radius  $R$  (siehe auch 9.7) sowie die magnetische Flussdichte und plotten Sie beide Vektorfelder.

### 14.7.2 Experiment: Fallender Magnet

Ein Magnet fällt in Folge der Gravitation in einem Kupferrohr. Erklären Sie was passiert und warum es passiert und zwar im Bezugssystem des Magneten.

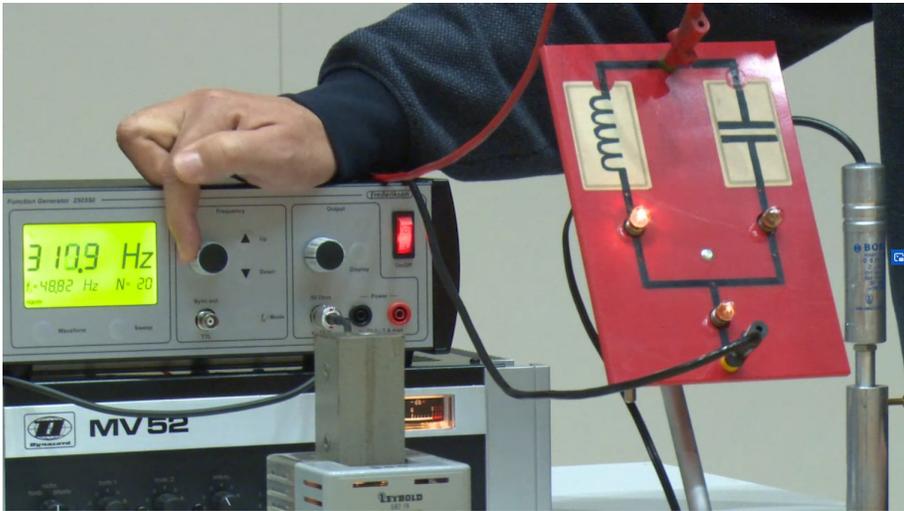
Besorgen Sie sich eine straff gewickelte Rolle Aluminiumfolie (möglichst lang und eng) und lassen Sie einen Magneten durch das Innere der Rolle fallen.

- Wie bewegt sich der Magnet durch das Rolleninnere?
- Bestimmen Sie für Ihren Magneten mit einer Stoppuhr die Fallzeit.
- Notieren Sie den Innen- und Außendurchmesser der Wicklung und vergleichen Sie Ihre Messungen der mit denen von Kommilitonen.
- Wie ändert sich die Fallgeschwindigkeit, wenn nur noch wenige Lagen Aluminiumfolie auf der Rolle sind?
- Welchen Effekt hat es für die Fallzeit, wenn Sie die Alufolie zusammen mit einer Lage Backpapier (von der Rolle) aufwickeln?
- In welche Form von Energie wird die potenzielle Energie des Magneten umgewandelt?

### 14.7.3 Programmierung: Vom Kraftwerk zum Verbraucher

Ein Generator wie in Abb. 12.7 des Vorlesungsskriptes im Primärstromkreis ist über einen Transformator der Kopplungskonstante  $k = 1$  an einen Motor gleicher Bauart wie der Generator im Sekundärstromkreis gekoppelt. Der Generator werde mit einem konstanten externen mechanischem Drehmoment  $\tau_{\text{ext}}^1$  betrieben und der Motor arbeite gegen ein konstantes externes dissipatives mechanisches Drehmoment  $\tau_{\text{ext}}^2 = -C\omega_{\text{Motor}}$ . Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Generators und des Motors auf, sowie Gleichungen für die Spannungen und Ströme im Primär und Sekundärteil des Transformators. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen numerisch für den Fall, dass zur Zeit  $t = 0$  sowohl der Generator als auch der Motor in Ruhe ist. Plotten Sie die Drehfrequenzen, Ströme und Spannungen als Funktion der Zeit. Spielt die Anfangsposition des Motors eine Rolle?





# Kapitel 15

## Stromkreise

In dieser Vorlesung leiten wir die Kirchhoff'schen Gesetze her, führen den Begriff der Impedanzen ein und erläutern einige wichtige einfache Stromkreise mit linearen Bauelementen. Wir behandeln Einschaltvorgänge, gedämpfte freie Schwingkreise und erzwungene Schwingungen in Schwingkreisen. Die effektive Impedanz eines endlichen Stromkreises ist eine meromorphe Funktion der Frequenz. Für unendlich viele Maschen lassen sich scharfe nichtanalytische Frequenzabhängigkeiten realisieren.

## 15.1 Stromkreise und Kirchhoff'sche Gesetze

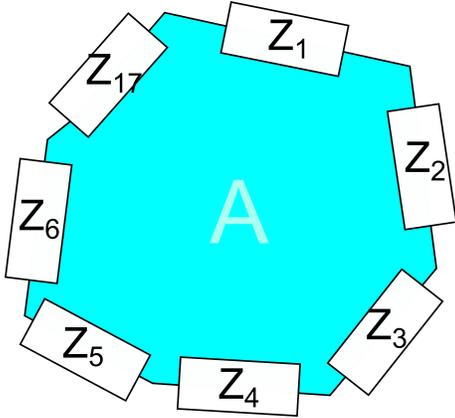


Abbildung 15.1: Eine Masche der Fläche  $A$  in einem Netzwerk aus Impedanzen

Wir betrachten weiterhin Stromkreise im quasistationären Zustand  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ . Wir greifen einen geschlossenen Stromkreis heraus und integrieren die zeitunabhängige homogene Maxwellgleichung  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  über die umschlossene Fläche des Stromkreises, die wir als eine Masche des Stromnetzwerkes begreifen, benutzen den Satz von Stokes und erhalten

$$\oint_{\text{Stromkreis}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (15.1)$$

Das Wegintegral längs des Maschenrandes zerlegen wir in Teilstücke über die einzelnen Bauelemente  $Z_i$ , und erhalten die Maschenregel

$$\sum_i U_i = 0, \quad (15.2)$$

wobei  $U_i = \int_{Z_i} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$  die an den Bauelementen abfallenden Spannungen bezeichnen.

Jetzt greifen wir einen Knoten des Stromnetzwerkes heraus, platzieren ihn in die Mitte eines von mir aus kugelförmiges Volumens und integrieren die Stationaritätsbedingung  $0 = \nabla \cdot \mathbf{j}$  über das Volumen, benutzen den Satz von Gauss und erhalten

$$0 = \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d^2 A. \quad (15.3)$$

Die Stromdichte ist nur dort von Null verschieden, wo ein Leiter das Volumen durchsticht. Wir zerlegen den Rand des Volumens in eine zusammenhängende nicht stromdurchflossene Fläche  $A_{\text{isoliert}}$  und davon getrennte stromdurchflossene Flächen  $A_i$  der einzelnen Leiter bezeichnen das Integral  $I_i = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d^2 A_i$  als den durch den Leiter  $i$  vom Knoten wegfließenden Strom und erhalten so die Knotenregel:

$$\sum_i I_i = 0. \quad (15.4)$$

Die Maschenregel und Knotenregel heißen die Kirchhoff'schen Gesetze und sind die Elektroniker-version der Gleichungen  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  und  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ .

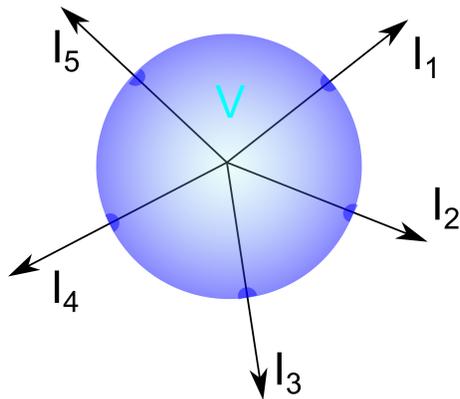


Abbildung 15.2: Ein vom Volumen  $V$  umgebener Knoten des Netzwerks

## 15.2 Einschaltprozess

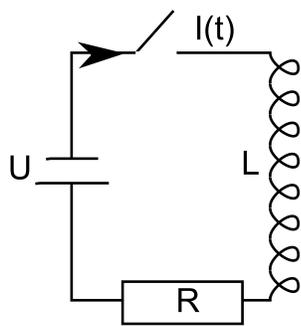


Abbildung 15.3: Stromkreis aus Batterie, Spule, Widerstand und Schalter

Wir benutzen die Maschenregel für die in Abbildung 15.3 abgebildete einmaschige Schaltung aus einer Batterie der Spannung  $U_B = -U$ , einem Widerstand der Spannung  $U_R = RI$ , einer Spule der Spannung  $U_L = L\dot{I}$  und einem Schalter, den wir zur Zeit  $t = 0$  schließen. Wir erhalten mit der Maschenregel die Differentialgleichung

$$0 = -U + RI + L\frac{dI}{dt} \quad (15.5)$$

für den Strom  $I(t)$  mit der Anfangsbedingung  $I(t = 0) = 0$ . Die Differentialgleichung 15.5 ist eine

lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit der Lösung

$$I(t) = \frac{U}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right) \quad (15.6)$$

$$U_R(t) = U \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right) \quad (15.7)$$

$$U_L(t) = U \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \quad (15.8)$$

mit der Zeitkonstanten  $\tau = L/R$ . Zu Anfang wird die Spannung der Batterie in der Masche ausschließlich von der Spule kompensiert und am Widerstand fällt keine Spannung ab. Während der Strom mit der Zeitkonstanten  $\tau = L/R$  auf  $U/R$  relaxiert verteilt sich, der die Batterie kompensierende Spannungsabfall, von der Spule auf den Widerstand um.

### 15.3 Schwingkreise

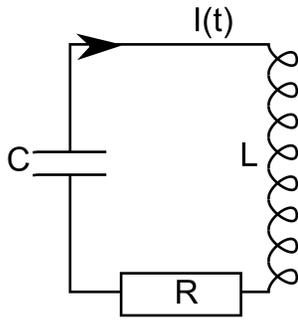


Abbildung 15.4: Stromkreis aus Kapazität, Induktivität, Widerstand und Schalter

Wir ersetzen in Abbildung 15.3 die Batterie durch einen Kondensator der Kapazität  $C = Q/U_C$  und erhalten die ebenfalls einmaschige in Abbildung 15.4 dargestellte Schaltung mit Maschenregel

$$0 = U_R + U_L + U_C \quad (15.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left( RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \right) = 0 \quad (15.10)$$

$$\frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{LC} = 0. \quad (15.11)$$

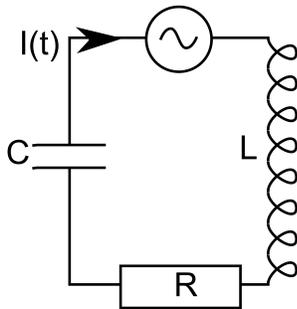
Die Differentialgleichung 15.11 kennen wir aus der Mechanik als die Differentialgleichung einer gedämpften freien Schwingung mit den beiden Lösungen

$$I = I_i e^{-\lambda t} \quad (15.12)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \quad (15.13)$$

die wir entsprechend der Anfangsbedingung zu superponieren haben. Je nachdem ob gilt  $R^2/4L^2 > 1/LC$ , oder ob gilt  $R^2/4L^2 < 1/LC$  befinden wir uns im Kriechfall oder wir haben eine gedämpfte exponentiell abklingende Schwingung.

Im Falle  $R = 0$  wird aus der gedämpften Schwingung eine ungedämpfte Schwingung, bei der die im Stromkreis gespeicherte elektromagnetische Feldenergie zwischen rein elektrischer Feldenergie im Kondensator und rein magnetischer Feldenergie in der Spule hin und her schwingt. Wir erhalten eine erzwungene Schwingung, wenn wir die drei Komponenten des Stromkreises in Abbildung 15.4 durch eine Wechselspannungsquelle  $U_\omega = -U_0 e^{i\omega_{ext}t}$  wie in Abbildung 15.5 ergänzen. Die Maschenregel ergibt die Differentialgleichung



**Abbildung 15.5:** Eine Wechselspannungsquelle erzwingt eine Schwingung mit  $\omega_{ext} \neq \omega_{int}$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = U_0 e^{i\omega_{ext}t}. \quad (15.14)$$

bei der die externe Wechselspannungsquelle dem Stromkreis die externe Kreisfrequenz  $\omega_{ext}$  aufzwingt nachdem die Schwingung mit den internen Kreisfrequenzen  $\omega_{int} = \Im \lambda_{1,2}$  nach der transienten Zeit  $\tau_{int}^{-1} = \Re \lambda_{1,2}$  abgeklungen sind. Die komplexe Amplitude des mit der externen Kreisfrequenz  $\omega_{ext}$  variierenden Stromes beträgt

$$\hat{I}_0(\omega_{ext}) = \frac{U_0 \omega_{ext} / L}{-\omega_{ext}^2 + i \frac{R}{L} \omega_{ext} + \frac{1}{LC}} \quad (15.15)$$

und ist identisch zur Amplitude und Phase eines erzwungenen mechanischen Schwingers. Wie bei einem mechanischen erzwungenen Schwinger lassen sich die Güte  $Q = \sqrt{L/R^2C}$  des Schwingers und die ungedämpfte Kreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$  definieren. In den Abbildungen 15.6 und 15.7 tragen wir das Amplitudenverhältnis zwischen Strom und Spannung, sowie die Phasenverschiebung zwischen beiden Größen als Funktion der externen Kreisfrequenz auf. Die Amplitude zeigt einen gegenüber  $\omega_0$  zur kleineren internen Kreisfrequenz  $\omega_{int}$  verschobenen Resonanzpeak der Breite  $Q^{-1}\omega_0$ . Strom und Spannung sind phasengleich bei kleinen Frequenzen und gegenphasig bei großen Frequenzen.

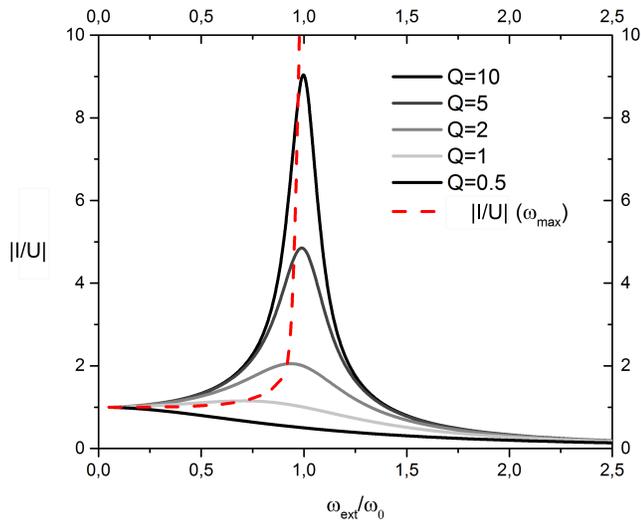


Abbildung 15.6: Betrag des Stromes in einem erzwungenen Schwingkreis der Güte  $Q$

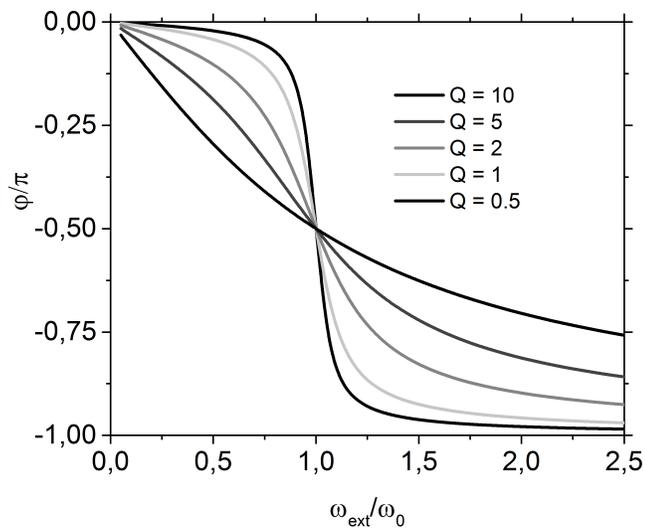


Abbildung 15.7: Phasenverschiebung  $\phi$  zwischen dem Strom und der treibenden Spannung in einem erzwungenen Schwingkreis der Güte  $Q$

## 15.4 Die Impedanz

Wir betrachten lineare Bauelemente, für die die am Bauelement abfallende Spannung eine lineare eventuell zeitverzögerte Funktion des Stromes ist:

$$U(t) = \int_{-\infty}^t dt' Z(t-t')I(t') \quad (15.16)$$

und bezeichnen mit  $Z(t)$  die Impedanz des Bauteils. Wenn wir alle Größen, Spannung, Strom, und Impedanzen Fouriertransformieren

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} X(t) \quad (15.17)$$

erhalten wir aus Gleichung 15.16 die Beziehung

$$U(\omega) = Z(\omega)I(\omega) \quad (15.18)$$

und nennen  $Z(\omega)$  die Impedanzen eines linearen Stromelementes. Wir finden

idealer Widerstand	$Z = R$	(15.19)
ideale Induktivität	$Z = i\omega L$	
ideale Kapazität	$Z = \frac{1}{i\omega C}$	

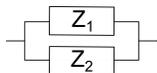
Schalten wir zwei Impedanzen  $Z_1$  und  $Z_2$  in Reihe wie in Abbildung 15.8 folgt aus der Maschenregel, dass die Gesamtimpedanz die Summe der Einzelimpedanzen ist:



**Abbildung 15.8:** Zwei Impedanzen in Reihenschaltung

$$Z = Z_1 + Z_2, \quad (15.20)$$

schalten wir beide Impedanzen parallel wie in Abbildung 15.9 folgt, dass sich die Kehrwerte der Impedanzen addieren



**Abbildung 15.9:** Zwei Impedanzen in Parallelschaltung

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}. \quad (15.21)$$

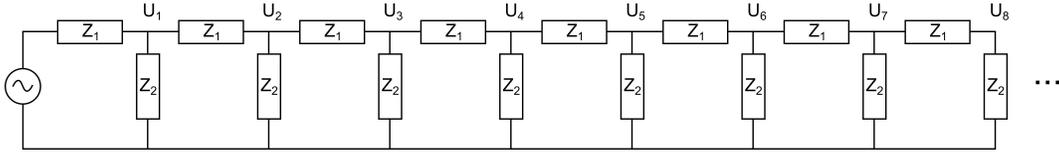
Schalten wir  $n + 1$  Impedanzen zu einem Stromnetzwerk zusammen beträgt die Gesamtimpedanz

$$Z_{ges} = \frac{P_{n+1}(Z_i)}{Q_n(Z_i)}, \quad (15.22)$$

wobei  $P_{n+1}$  ein Polynom  $n + 1$ ten Grades in den Impedanzen  $Z_i$  und  $Q_n$  ein Polynom  $n$ ten Grades in den Impedanzen  $Z_i$  ist. Damit ist  $Z_{ges}$  eine meromorphe Funktion der Einzelimpedanzen und auch die Frequenzabhängigkeit  $Z_{ges}(\omega)$  ist eine meromorphe Funktion der Frequenz. Wir können also durch Zusammenschalten von Impedanzen beliebige meromorphe Funktionen der Frequenz zusammenbasteln. Die Impedanz

$$\frac{1}{Z(\omega)} \propto \frac{\omega_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \quad (15.23)$$

ist eine meromorphe Funktion, die als Bandpass agiert und nur Wechselstrom der Frequenz  $\omega \approx \omega_0 \pm \gamma$  passieren lässt.



**Abbildung 15.10:** Eine Stromleiter aus zwei Impedanzen  $Z_1$  und  $Z_2$  mit effektiver Impedanz  $Z^{eff}$

Wir betrachten eine Stromschaltung die aus einer Leiter besteht, deren Sprossen die Impedanz  $Z_2$  und deren oberer Holm zwischen jeder Sprosse die Impedanz  $Z_1$  eingebaut hat.

Wir bezeichnen die Gesamtimpedanz der Leiter aus  $n$  Maschen mit  $Z_n^{eff}$  und finden die iterative Beziehung:

$$Z_{n+1}^{eff} = Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_n^{eff}}}, \quad (15.24)$$

bzw. wenn wir die Leiter unendlich lange machen die Beziehung

$$Z_\infty^{eff} = Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_\infty^{eff}}}. \quad (15.25)$$

Wir lösen nach der effektiven Impedanz der unendlichen Leiter auf und finden

$$Z_\infty^{eff} = \frac{Z_1}{2} + \sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2}, \quad (15.26)$$

dass wir mit unendlichen Schaltern auch nicht analytische Funktionen approximieren können. Ist die Impedanz  $Z_1 = i\omega L$  eine Spule und die Impedanz  $Z_2 = 1/i\omega C$  so finden wir für die effektive Impedanz der Leiter

$$Z_\infty^{eff} = L \left( \frac{i\omega}{2} + \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{\omega^2}{4}} \right). \quad (15.27)$$

In Abbildung 15.11 haben wir die Impedanz der Leiter als Funktion der Frequenz aufgetragen. Der unteren Holm enthält keine Bauelemente und wir setzen das elektrostatische Potenzial im unteren Holm auf Null. Das Potenzial über der  $n$ ten Sprosse bezeichnen wir mit  $U_n$ . Wir interessieren uns für den in dem oberen Holm zwischen der  $n$ ten und  $n + 1$ ten Sprosse fließenden Strom  $I_n$ . Dieser Strom fließt durch die Impedanz  $Z_1$  aber genauso durch die Gesamtanordnung hinter der

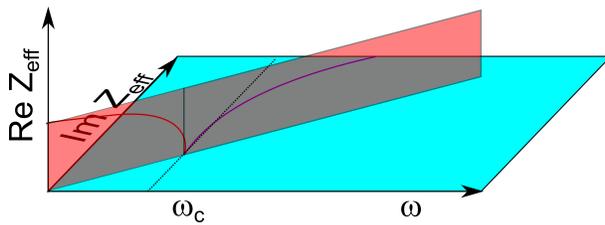


Abbildung 15.11: Die Impedanz  $Z^{eff}$  der Leiter als Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$

nten Sprosse. über  $Z_1$  fällt die Spannung  $U_n - U_{n+1}$  ab, während über die Gesamtanordnung die gesamte Spannung  $U_n$  abfällt. Wir finden:

$$\frac{U_n - U_{n+1}}{Z_1} = I_n = \frac{U_n}{Z_{eff}} \quad (15.28)$$

Das Verhältnis der Spannungen über der  $n + 1$ ten und  $n$ ten Sprosse ist deshalb

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{Z_{eff} - Z_1}{Z_{eff}} \quad (15.29)$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2} - \frac{Z_1}{2}}{\sqrt{\frac{Z_1^2}{4} + Z_1 Z_2} + \frac{Z_1}{2}} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} - \omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} + \omega} \quad (15.30)$$

wobei wir die Abkürzung  $\omega_c = 2/LC$  eingeführt haben. Für  $\omega < \omega_c$  sind der Zähler und Nenner von Gleichung 15.30 zwei zueinander komplex konjugierte Zahlen des gleichen Betrages, und die zwei Spannungen haben den selben Betrag aber eventuell unterschiedliche Phase

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{i\delta} \quad (15.31)$$

und das Signal propagiert ungedämpft durch die Leiter. Für  $\omega > \omega_c$  hingegen ist sowohl der kleinere Zähler und der größere Nenner reell, das Verhältnis der Spannungen also von der Form

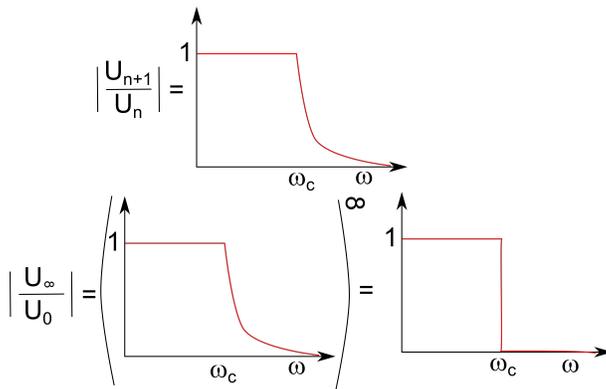
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-\delta} \quad (15.32)$$

und das Signal dringt nur gedämpft in die Leiter ein.

Wir finden das Verhältnis der Spannung über der letzten und über der nullten Sprosse

$$\left| \frac{U_\infty}{U_0} \right| = \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right|^\infty = \theta(\omega_c - \omega), \quad (15.33)$$

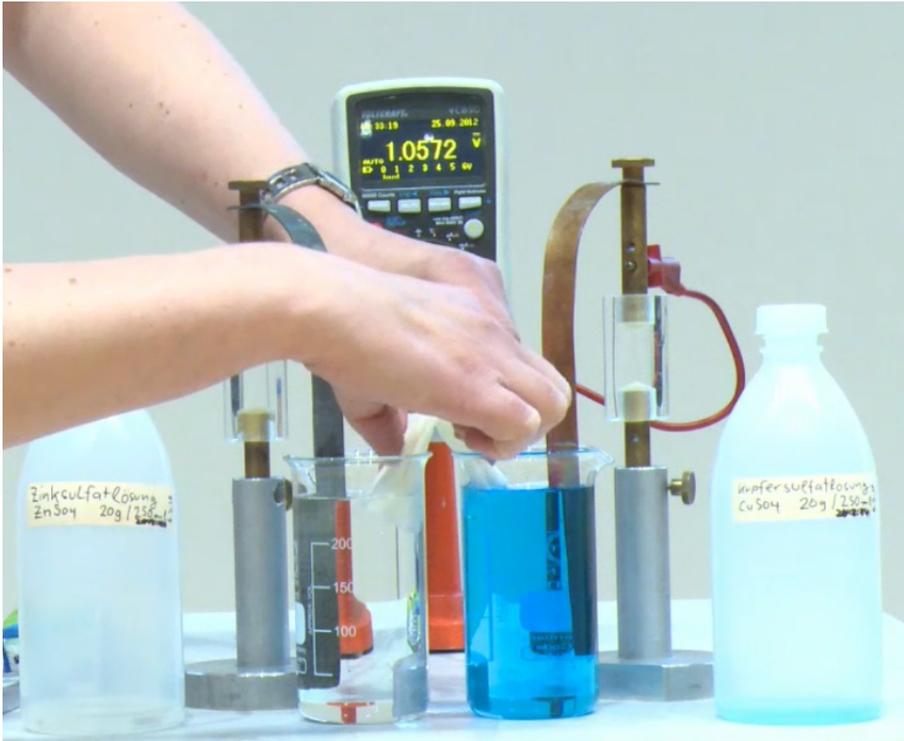
wobei  $\theta(x)$  die Heavisidsche Sprungfunktion bezeichnet. Die Leiter ist ein Tiefpassfilter. Platzieren wir die Spulen in den Sprossen und die Kapazitäten im oberen Holm, ist die Leiter ein Hochpassfilter. Beachten Sie, dass alle Impedanzen lineare Antwortsysteme sind, bei denen Strom und Spannung zueinander proportional sind. Für richtig nützliche Schaltungen benötigt man nichtlineare Bauele-



**Abbildung 15.12:** Nach vielen Sprossen ergibt sich ein Tiefpass  $\omega$

mente, wie einen Transistor, oder ein Schalter. Details hierzu erfahren Sie in der Vorlesung über Elektronik von Herrn Reinhard Richter.





## Kapitel 16

# Über Batterien

In dieser Vorlesung geben wir zunächst einen Exkurs über thermodynamische Potenziale und deren Minimierung im thermodynamischen Gleichgewicht und erklären das Verhalten von Redoxreaktionen im Gleichgewicht und unter stationären Bedingungen, bei denen Ladung in Form stationärer Ströme transportiert wird. Wir beschreiben eine Batterie und deren Innenwiderstand. Wir identifizieren die stöchiometrische Kombination der elektrochemischen Potenziale als die treibende Kraft einer Redoxreaktion.

## 16.1 Das thermodynamische Gleichgewicht

In der Natur beobachten wir, dass makroskopische Phänomene einem Gleichgewicht zustreben, in dem sie sich dann nicht mehr weiter zeitlich verändern. Sie sind im *thermodynamischen Gleichgewicht*. Dieses Gleichgewicht ist bei gleichen externen Bedingungen immer das gleiche und unabhängig davon, entlang welchen Weges und mit welcher Vorgeschichte es erreicht wird. Es gibt aus diesem Grund eine Funktion, ein *thermodynamisches Potenzial*, das im thermodynamischen Gleichgewicht einen *speziellen, das heißt minimalen oder maximalen* Wert annimmt. Für ein System welches aus mehreren chemischen Komponenten (A, B, C) mit einer jeweils festen Teilchenzahl  $N_A, N_B, N_C$  besteht, mit einem Thermostat auf fester Temperatur  $T$  gehalten wird und bei festem äußeren Druck  $p$  und konstantem elektrostatischen Potenzial  $\phi$  vorliegt, heißt dieses thermodynamische Potenzial die freie Enthalpie bzw. im englischen Sprachgebrauch die Gibbsche Energie  $G(T, p, N_A, N_B, N_C, \phi, X\dots)$ , wobei wir mit  $X$  weitere interne Nichtgleichgewichtsvariablen bezeichnen, wie z.B die Anordnung der Moleküle oder den Aggregatzustand. Welche Nichtgleichgewichtssituation wir uns auch immer mit den Variablen  $X$  ausdenken, für die Gleichgewichtssituation ist die Gibbsche Energie stets am kleinsten. Werden die Teilchenzahlen der Komponenten nicht festgehalten und können sich verändern, z. B bei einer chemischen Reaktion der Form



mit den stöchiometrischen Koeffizienten  $\nu_A, \nu_B$  und  $\nu_C$ , bei der sich die Teilchenzahl mit dem Umsatz  $\zeta$  der Reaktion entsprechend

$$N_A = N_A^0 - \nu_A \zeta \quad (16.2)$$

$$N_B = N_B^0 - \nu_B \zeta \quad (16.3)$$

$$N_C = \nu_C \zeta \quad (16.4)$$

von den Anfangsteilchenzahlen  $N_A^0, N_B^0$  und  $N_C^0 = 0$  wegbewegen, so wird der Umsatz  $\zeta$  eine Nichtgleichgewichtsgröße, und die Gibbsche Energie  $G(T, p, N_A(\zeta), N_B(\zeta), N_C(\zeta), \phi)$  wird dann minimal, wenn die chemische Reaktion ins Gleichgewicht geführt hat (Abbildung 16.1), also gilt

$$\frac{dG}{d\zeta} = 0 \quad \text{im Gleichgewicht.} \quad (16.5)$$

Wir führen die Differentiation nach dem Umsatz gemäß der Kettenregel der Differentiation durch und finden:

$$\frac{\partial G}{\partial N_A} \frac{dN_A}{d\zeta} + \frac{\partial G}{\partial N_B} \frac{dN_B}{d\zeta} + \frac{\partial G}{\partial N_C} \frac{dN_C}{d\zeta} = 0. \quad (16.6)$$

Wir bezeichnen die partiellen Ableitungen der Gibbschen Energie nach den Teilchenzahlen als die elektrochemischen Potenziale

$$\mu_i = \frac{\partial G}{\partial N_i} \quad (16.7)$$

des Stoffes  $i = A, B, C$ , sehen an Gleichung 16.2, dass  $\frac{dN_i}{d\zeta} = \pm \nu_i$  gilt (das  $-$  Zeichen gilt für die Edukte der Reaktion das  $+$ -Zeichen für die Produkte der Reaktion) und können die Bedingung für das thermodynamische Gleichgewicht der Reaktion als

$$\nu_A \mu_A + \nu_B \mu_B = \nu_C \mu_C \quad (16.8)$$

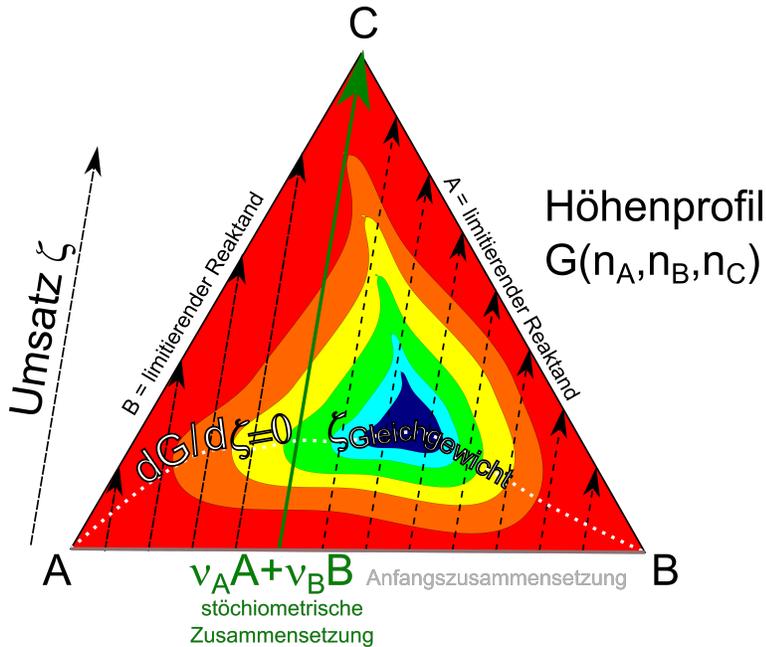
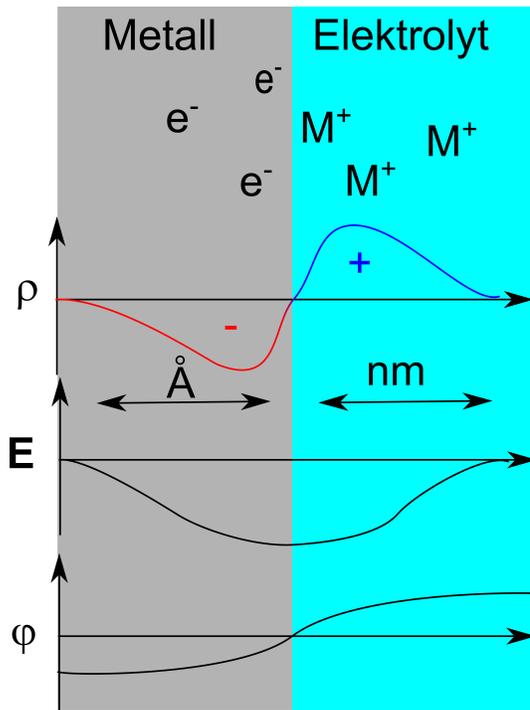


Abbildung 16.1: Höhenlinienprofil der Reaktion  $\nu_A A + \nu_B B \rightarrow \nu_C C$

schreiben. In der chemischen Literatur benutzt man oft die Anzahl der Mole  $n_A = N_A/L$  bzw. die molaren Konzentrationen  $c_A = n_A/V$  anstatt der Teilchenzahl  $N_A$ , die ideale Gaskonstante  $R = Lk_B$  anstatt der Boltzmannkonstante, und die Faradaykonstante  $\mathcal{F} = Le$  anstatt der Ladung  $e$  eines Elektrons mit der Loschmidtschen Zahl  $L = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , und misst die elektrochemischen Potenziale als auf ein Mol statt auf ein Teilchen bezogene Größe. Wir geben hier die von Chemikern benutzte Form der konstituierenden Gleichung für das elektrochemische Potenzial einer chemischen Komponente  $A$  in einem idealen Gemisch aus verschiedenen Komponenten in einem elektrostatischen Potenzial  $\phi$  an

$$\mu_A = G_{Am}^{ref} - RT \ln \frac{c_A}{c_A^{ref}} + z_A \mathcal{F} \phi. \quad (16.9)$$

Hierbei bezeichnet  $G_{Am}^{ref}$  die molare Gibbsche Energie der Komponente  $A$  als Reinsubstanz (nicht in einem Gemisch) bei verschwindendem elektrostatischen Potenzial. Der Term  $-RT \ln(c_A/c_A^{ref})$  beschreibt den entropischen freien Enthalpiegewinn der durch die Unordnung des gemischten Zustands gegenüber dem ungemischten Zustand mit der Referenzkonzentration  $c_A^{ref}$  entsteht und  $z_A \mathcal{F} \phi$  ist die elektrostatische Energie der mit Valenz  $z_A$  geladenen Komponente  $A$  im elektrostatischen Potenzial  $\phi$ . Eine Redoxreaktion ist eine chemische Reaktion an einer Phasengrenze zwischen einer Elektrode und einem Elektrolyten, bei dem die Reaktionsteilnehmer teilweise in der Elektrode und teilweise im Elektrolyten gelöst sind. Da die teilweise geladenen Reaktionspartner in unterschiedlichen Phasen gelöst sind ziehen sie sich zwar elektrostatisch gegenseitig an, und versuchen so sich gegenseitig in der Nähe der Grenzfläche zu halten, andererseits besteht die entropische Tendenz sich auf die gesamte Phase der Elektrode (des Elektrolyten) zu verteilen um maximalen Entropiegewinn zu haben. Dadurch lädt sich die Region der Grenzfläche mit jeweils anderem Vorzeichen auf (Abbildung



**Abbildung 16.2:** Verlauf der Ladungsdichte, des elektrischen Feldes und des elektrostatischen Potentials über die Elektroden/Elektrolyt-Grenzfläche hinweg

16.2, und die Phasen haben im Gleichgewicht weit weg von der Grenzfläche ein unterschiedliches elektrostatisches Potenzial  $\phi^I$  und  $\phi^{II}$ . Das thermodynamische Gleichgewicht schreibt sich damit als:

$$\nu_A \mu_A^I + \nu_B \mu_B^I = \nu_C \mu_C^{II} \quad (16.10)$$

bzw.

$$\underbrace{\nu_A G_{Am}^{ref} + \nu_B G_{Bm}^{ref} - \nu_C G_{Cm}^{ref}}_{\Delta G_{m,Reaktion}^{ref}} - RT \ln \frac{(c_A/c_A^{ref})^{\nu_A} (c_B/c_B^{ref})^{\nu_B}}{(c_C/c_C^{ref})^{\nu_C}} + (\nu_A z_A + \nu_B z_B) \mathcal{F} \phi^I - \nu_C z_C \mathcal{F} \phi^{II} = 0. \quad (16.11)$$

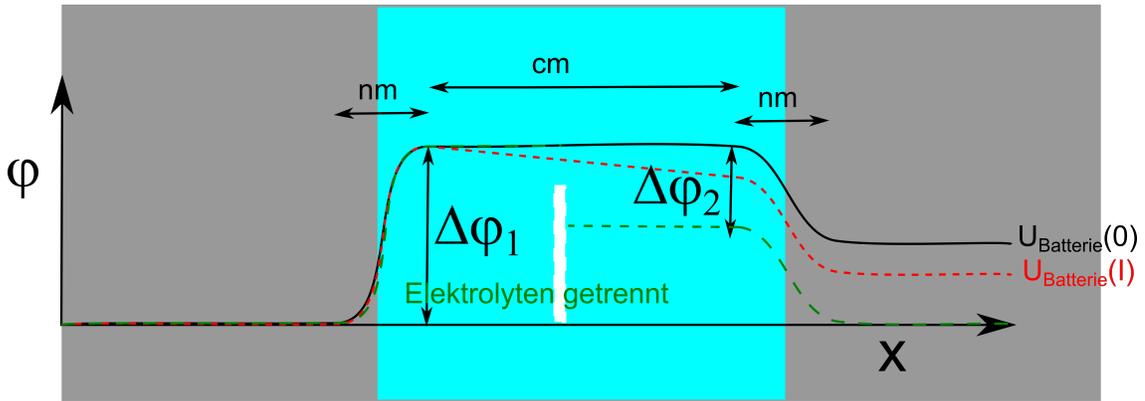
Da bei der Reaktion die elektrische Ladung erhalten sein muss gilt

$$(\nu_A z_A + \nu_B z_B) = \nu_C z_C. \quad (16.12)$$

Wir nennen  $\Delta\phi = \phi^I - \phi^{II}$  die Gleichgewichtsspannung der Elektroden/Elektrolyt-Grenzfläche und schreiben Gleichung 16.11 als

$$\begin{aligned}
& \Delta G_{\text{m,Reaktion}}^{\text{ref}} && - RT \ln \frac{(c_A/c_A^{\text{ref}})^{\nu_A} (c_B/c_B^{\text{ref}})^{\nu_B}}{(c_C/c_C^{\text{ref}})^{\nu_C}} \\
& \text{Reaktions freie Enthalpiedifferenz} && \text{---} T \times \text{Mischungsentropiegewinn} \\
& \text{einer Reaktion} && \\
& \text{Reinstoff A, Reinstoff B} \rightarrow \text{Reinstoff C} && \\
& && + (\nu_A z_A + \nu_B z_B) \mathcal{F} \Delta \phi = 0, \quad (16.13) \\
& && \text{elektrische Arbeit der Reaktion}
\end{aligned}$$

mit drei wesentlichen Anteilen: Der Anteil  $\Delta G_{\text{m,Reaktion}}^{\text{ref}}$  beschreibt die Reaktions freie Enthalpie einer gedachten Reaktion, bei der die Edukte in separaten Behältern auf Kosten des in einem dritten Behälter befindlichen Produktes in den ursprünglichen Behältern verschwinden und im neuen Behälter auftauchen, ohne dass es zu Mischungsprozessen kommt, und ohne dass unterschiedliche elektrostatische Potenziale aufgebaut werden. Eine solche Reaktion würde bis zum bitteren Ende durchreagieren und zumindest eines der Edukte vollständig aufbrauchen bevor sie zum Erliegen käme, gesetzt den Fall, dass  $\Delta G_{\text{m,Reaktion}}^{\text{ref}} < 0$  gilt. Im anderen Fall würde sie überhaupt nicht ablaufen. Der zweite Term beschreibt die entropische Absenkung der freien Enthalpie, wenn die Reinsubstanzen durchmischt werden. Für kleine Verunreinigungskonzentrationen dominiert dieser Term und verhindert, dass eine Reaktion zu Reinsubstanzen, wie gerade beschrieben in der Realität stattfinden kann. Die Reaktion wird immer partiell ablaufen und kein Umsatz ( $\zeta = 0$ ) und maximaler Umsatz, bei dem eine Edukt vollständig aufgebracht wird sind keine Gleichgewichtsumsätze. Bei einer Redoxreaktion sind geladene Komponenten, wie z.B. Elektronen in den Elektroden und Metallionen im Elektrolyt beteiligt, die in unterschiedlichen Phasen gelöst sind. Die Reaktion läuft deshalb nur an der Phasengrenze Elektrode/Elektrolyt ab. In Folge der Ladung des Elektron und des positiven Metallions, ziehen sich Elektron und Metallion gegenseitig an und bilden zwei Ladungswolken der Ausdehnung der Thomas-Fermilänge (wenige Angström) für die Elektronen und der Debyelänge (1-2 Nanometer) für die Metallionen, wie in Abbildung 16.2 dargestellt, mit elektrischen Feldlinien, die an den Metallionen im Elektrolyt beginnen und an den Elektronen im Metall enden. Das Wegintegral des elektrischen Feldes über diesen Grenzbereich ist die Gleichgewichtskontaktspannung  $\Delta \phi$ . Dieser Potenzialunterschied behindert die Dissoziation eines Metallatoms in Metallion und Elektron, weshalb die Dissoziationsreaktion nicht so weit reagiert als wenn die Produkte der Dissoziation ungeladen wären.



**Abbildung 16.3:** Verlauf des elektrostatistischen Potentials in einer unbelasteten und belasteten Batterie

## 16.2 Batterien und Innenwiderstand

In einer Batterie hat man zwei Elektroden aus unterschiedlichen Metallen und einen Elektrolyt der die beiden Elektroden räumlich mit Abständen der Größenordnung  $mm - cm$  separiert (Abbildung 16.3). Im Inneren des Elektrolyten, außerhalb der Grenzregion zum Metall gibt es im Gleichgewicht keine Potentialgefälle, so dass das Gesamtpotentialgefälle zwischen den Metallen im Gleichgewicht

$$U_{Batterie}^{eq} = \Delta\Delta\phi = \Delta\phi_1 - \Delta\phi_2 \quad (16.14)$$

beträgt. Gleichgewicht herrscht jedoch nur, wenn der Potentialunterschied zwischen beiden Elektroden dadurch aufrechterhalten wird, indem beide Metallenden voneinander elektrisch isoliert sind. Verbindet man beide Enden so beginnt Strom zu fließen: Sowohl Elektronen als auch die Kationen im Elektrolyten beginnen von der Elektroden/Elektrolyt-Grenzfläche mit der höheren Potentialbarriere zu der Elektroden/Elektrolyt-Grenzfläche mit der niederen Potentialbarriere zu wandern. Da für das Wandern der Kationen ein Potenzialgradient:

$$\nabla\phi_{Elektrolyt} = -\mathbf{E}_{Elektrolyt} = -\frac{\mathbf{j}_{Ionen}}{\sigma_{Elektrolyt}} \quad (16.15)$$

nötig ist, fällt der Potentialunterschied  $\Delta\Delta\phi$  nicht mehr ausschließlich im elektronischen Teil des Stromkreises ab, sondern teilweise auch im ionischen Teil des Stromkreises. Verbinden wir beide Metallenden widerstandslos und unterbinden die Wanderung der Ionen indem wir die Elektroden in zwei getrennte Elektrolytbehälter tauchen liegt  $\Delta\Delta\phi$  zwischen den beiden Behältern an, während der elektronische Teil des Stromkreises keine Potenzialgradienten hat. Letztere Situation ist wieder eine Gleichgewichtssituation und es fließt kein Strom. Die am elektronischen Teil der Batterie anliegende Spannung hängt also vom Strom ab

$$U_{Batterie}(I) < U_{Batterie}^{eq} \quad (16.16)$$

und sinkt mit der elektronischen Belastung des Stromkreises bei Stromfluß. Die Abnahme der Batteriespannung im elektronischen Stromteil mit dem Strom bezeichnet man als den Innenwiderstand

der Batterie

$$R_{innen} = -\frac{\partial U_{Batterie}(I)}{\partial I} \quad (16.17)$$

und wir können näherungsweise schreiben

$$U_{Batterie}(I) \approx U_{Batterie}^{eq} - R_{innen}I \quad (16.18)$$

Die Potenzialabfälle an einer Elektrode sind in Büchern der physikalischen Chemie tabellarisiert und überspannen einen Bereich von  $\Delta\phi = \pm 3V$ :

Teilreaktion	$\Delta\phi$	
$H_4CXeO_6 + 2H^+ + 2e^- \rightarrow XeO_3 + 3H_2O$	+3V	
	⋮	
$2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2$	0V	⋅
	⋮	
$Li^+ + e^- \rightarrow Li$	-3.05V	

Die Gleichgewichtsbatteriespannung erhält man über die Differenz der Teilreaktionen.

## 16.3 Bemerkungen

Die chemische Reaktionsfreie Enthalpie  $\Delta G_{m,Reaktion}^{ref}$  beinhaltet die Energie, die notwendig ist ein neutrales Atom zu ionisieren, also das Elektron vom Metallrumpfatom gegen das elektrische Feld des einzelnen Rumpfatoms zu trennen. Zu dieser Energie kommen noch entropische Beiträge, die sich bei einer endlichen Temperatur ergeben.

Die elektrische Arbeit  $(\nu_A z_A + \nu_B z_B)\mathcal{F}\Delta\phi$  ist der physikalische energetische Enthalpiebeitrag der notwendig ist um die kollektive Überschufelektronenwolke von der kollektiven Metallionenwolke zu trennen.

Die entropische Zunahme der Reaktionsfreien-Enthalpie durch das Mischen der Komponenten wird durch  $-RT \ln(c_A/c_A^{ref})^{\nu_A} (c_B/c_B^{ref})^{\nu_B} / (c_C/c_C^{ref})^{\nu_C}$  beschrieben.

Es ist aber nicht vollkommen klar, wie die Aufteilung in ein individuelles chemisches Rumpfelektrisches Feld, welches in  $\Delta G_{m,Reaktion}^{ref}$  eingeht und ein physikalisches kollektives elektrisches Feld  $\nabla\phi$  zu machen ist. Die Ausdehnung der kollektiven Elektronenwolke, die Thomas-Fermi-Länge ist von der selben Größenordnung (Angström) wie die Distanz, die man ein Elektron relativ zum Rumpfatom bewegen muß, um es von seinem individuellen Bindungspartner zu trennen.

Man kann aus diesem Grund die beiden Größen  $\Delta G_{m,Reaktion}^{ref}$  und  $(\nu_A z_A + \nu_B z_B)\mathcal{F}\Delta\phi$  nicht getrennt messen. Erst nach der Kombination zweier Elektroden und einem Elektrolyten zu einer Batterie ergibt sich eine Längenskalentrennung, so dass  $\Delta\Delta G_{m,Reaktion}^{ref}$  und  $\Delta\Delta\phi$  getrennt messbar werden, denn nun fällt  $\Delta\Delta\phi$  über die makroskopische Distanz zwischen den Elektroden ab. Da man  $\Delta\phi$  nicht separat messen kann legt man den Potenzialabfall einer Wasserstoffelektrode  $2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2$  per Definition auf  $\Delta\phi_{H_2/2H^++2e^-} = 0V$  fest.

Als Beispiel einer Batterie zeigen wir in Abbildung 16.4 das Daniellielement, welches aus einer Kupfer- und einer Zinkelektrode in einem Schwefelsäureelektrolyt besteht.

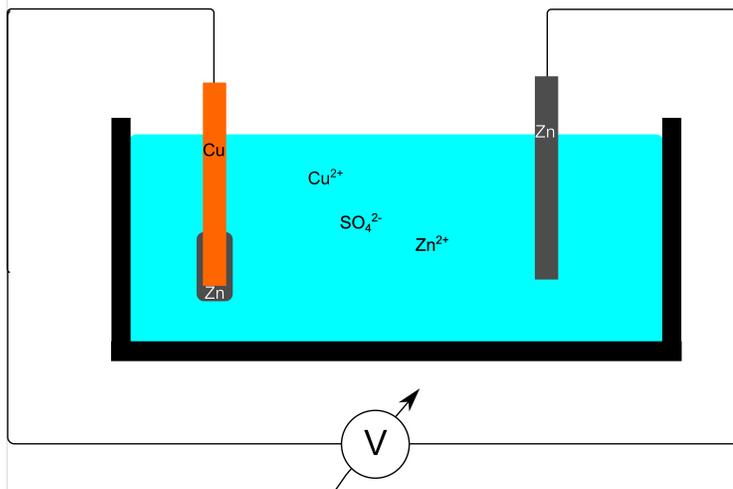


Abbildung 16.4: Daniellelement

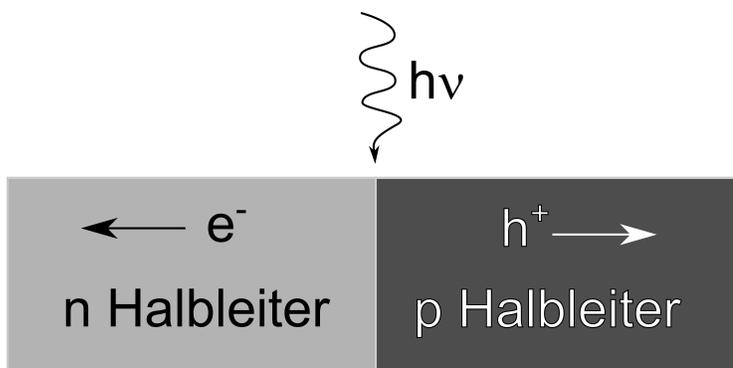


Abbildung 16.5: Prinzip einer Photovoltaikzelle

Als weiteres Beispiel (Abbildung 16.5) zeigen wir eine Photovoltaikzelle, die nach dem selben Prinzip funktioniert, und auf der Reaktion



beruht. Anstatt der Elektrode hat man einen Elektronen leitenden  $n$ -Halbleiter. Anstatt des Elektrolyten einen Löcher ( $h^+$ ) leitenden  $p$ -Halbleiter.

## 16.4 Übungen

### 16.4.1 Schaltkreis einer meromorphen Funktion

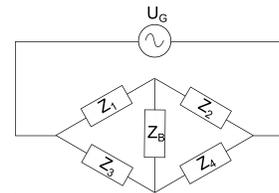
Zeichnen Sie einen Bauelement aus maximal 6 idealen Widerständen, idealen Spulen und idealen Kondensatoren, das die komplexe Impedanz

$$Z(\omega) = \frac{a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3}{b_0 + b_1\omega + b_2\omega^2}$$

besitzt.

### 16.4.2 Wheatstonesche Brücke

Eine Wheatstonesche Brücke besteht aus 5 Impedanzen, wie in 16.6 dargestellt. Berechnen Sie sämtliche Teilspannungen und Teilströme an den einzelnen Impedanzen als Funktion einer angelegten Gesamtwechselspannung. Welche Bedingung zwischen den Impedanzen muss erfüllt sein, damit der Brückenstrom  $I_B$  und die Brückenspannung  $U_B$  verschwindet? Was ist die Gesamtimpedanz  $Z_G$  der Wheatstoneschen Brücke?



**Abbildung 16.6:** Eine Wheatstonesche Brückenschaltung.

### 16.4.3 Experiment: Messung komplexer Impedanzen mit zwei Smartphones

Benutzen Sie eine Frequenzgenerator-App als frequenzabhängige Stromquelle und eine Oszilloskop-App als Messinstrument und messen Sie die verschiedenen besprochenen Kombinationen verschiedener Impedanzen als Funktion der Frequenz durch.

### 16.4.4 Programmierung: Generator mit komplexer Impedanz

Ein Generator wie in Abb. 12.7 ist an eine Serienschaltung aus Widerstand, Spule und Kondensator angeschlossen. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Generator auf und lösen Sie die Bewegungsgleichung des Generators numerisch als Funktion der Zeit. Welche möglichen asymptotischen Zustände gibt es? Plotten Sie den Winkel des Generators, den Strom und die Spannung am Generator als Funktion der Zeit für die verschiedenen Fälle.

$$\mathcal{FT}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \\ = \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$$

$$\mathcal{FT}^{-1}[\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)] \\ = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

## Kapitel 17

# Von der Verschiebungsstromdichte zur Wellengleichung

In dieser Vorlesung betrachten wir zeitabhängige elektrische Felder. Wir zeigen dass es zeitabhängige Situationen ohne magnetische Flussdichte gibt. Wir betrachten die Verschiebungsstromdichte  $\epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$  in einem sich aufladenden Kondensator. Wir besprechen die fundamentalen Gleichungen der klassischen Physik und stellen die phänomenologischen klassischen Gleichungen der Physik gegenüber. Wir führen die Fouriertransformierten elektromagnetischen Felder ein und leiten die Wellengleichung der Felder her.

## 17.1 Nichtstationäre Ströme

Bisher haben wir lediglich stationären Zustände  $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$  betrachtet, bei denen sich die Ladungsdichte  $\rho(t)$  zeitlich nicht verändert hat. Wir fokussieren unser Augenmerk auf die zweite inhomogenen Maxwellgleichung:

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (17.1)$$

und nehmen die Divergenz der Gleichung

$$\underbrace{\nabla \cdot c^2 \nabla \times \mathbf{B}}_{=0} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{E}}{\partial t} \quad (17.2)$$

$$0 \stackrel{\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0}{=} \frac{\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}}{\epsilon_0} \quad (17.3)$$

und erhalten zusammen mit der ersten inhomogenen Maxwellgleichung die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (17.4)$$

welche die Erhaltung der Ladung beschreibt. Der Term  $\partial \mathbf{E} / \partial t$  in der zweiten inhomogenen Maxwellgleichung sichert, dass Ladungserhaltung (und Lorentzinvarianz) gilt.

Wir betrachten eine homogen geladene Kugel des zeitabhängigen Radius  $R(t)$  und der Dichte

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{3Q}{4\pi R(t)^3} \theta(R(t) - r) \quad (17.5)$$

In der inhomogenen Maxwellgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (17.6)$$

kommt, keine Zeitableitung vor, weshalb das elektrische Feld zur Zeit  $t$  sich nicht unterscheidet vom elektrischen Feld einer homogen geladenen Kugel des selben aber zeitlich sich nicht verändernden Radius. Wir schreiben deshalb die in Vorlesung 4 gefundene Lösung für das elektrische Feld ab, indem wir den dort festen Radius  $R$  durch den hier zeitlich variierenden Radius  $R(t)$  ersetzen.

$$\mathbf{E}(r) = \mathbf{e}_r \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R(t)^3} & \text{für } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & \text{für } r > R(t) \end{cases} \quad (17.7)$$

Das elektrische Feld genügt der statischen homogenen Maxwellgleichung  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , obwohl der Radius der Kugel zeitabhängig ist. Wir schließen deshalb aus der zeitabhängigen homogenen Maxwellgleichung

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (17.8)$$

dass die Zeitableitung der magnetischen Flussdichte  $\partial \mathbf{B} / \partial t = \mathbf{0}$  verschwindet.

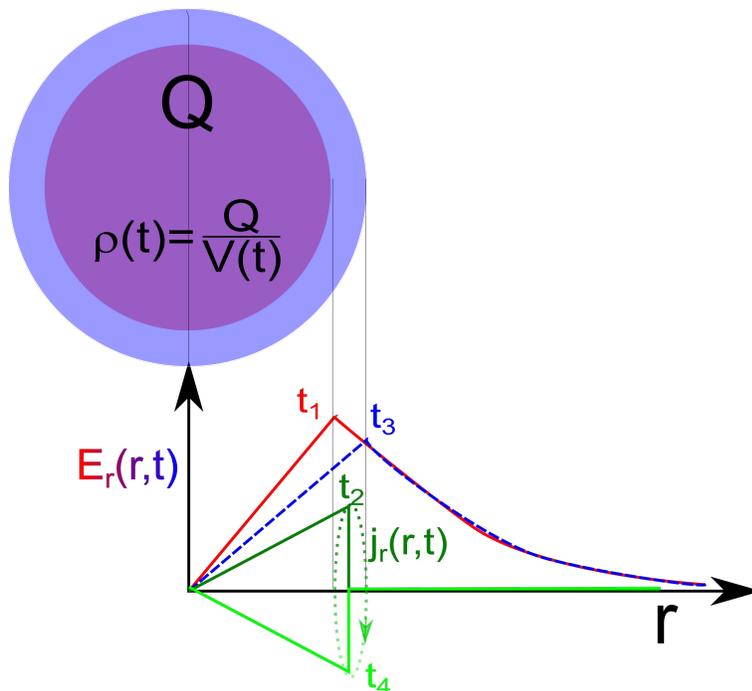
Wir integrieren die Kontinuitätsgleichung 17.4 über das Kugelvolumen vom Radius  $r$ , verwenden des Satz von Gauss und finden

$$4\pi r^2 j_r(r) = -Q\theta(R(t) - r) \frac{r^3 \partial(R(t)^{-3})}{\partial t} = 3Q\theta(R - r) \frac{r^3 \dot{R}}{R^4}, \quad (17.9)$$

bemerken dass andere als radiale Komponenten der Stromdichte aus Symmetriegründen verschwinden müssen und finden die Stromdichte des Problems:

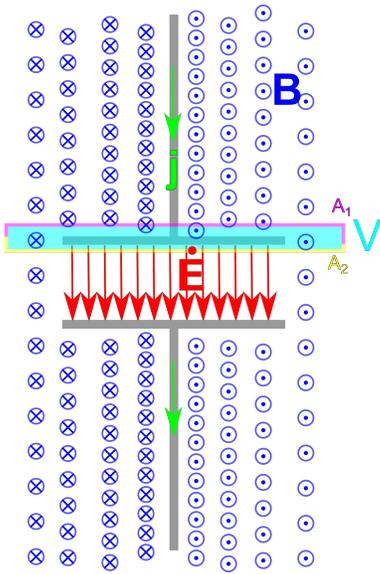
$$\mathbf{j} = \theta(R - r) \frac{3Qr\dot{R}}{4\pi R^4} \mathbf{e}_r \quad (17.10)$$

Wir benutzen Gleichung 17.7 und Gleichung 17.10 und finden dass  $\mathbf{j}/\epsilon_0 + \partial\mathbf{E}/\partial t = \mathbf{0}$  und folgern aus der inhomogenen Maxwellgleichung 17.1 dass  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  gilt. Wir können sämtliche dynamische Maxwellgleichungen ausschließlich mit einem elektrischen Feld, ohne jeglicher magnetischer Flussdichte  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  lösen. Wenn wir Ladung an einem Punkt konzentrieren bzw. zeitlich dispergieren ohne den Schwerpunkt der Ladung zu bewegen gelingt uns das, ohne dass wir transient magnetische Feldenergie auf oder abbauen müssten. Das elektrische Feld ist nur in der Kugel zeitabhängig, nicht außerhalb der Kugel (Abbildung 17.1). Insbesondere strahlt eine isotrop oszillierende Ladungswolke keine elektromagnetische Strahlung aus.



**Abbildung 17.1:** Flussdichtefreies elektromagnetisches Feld und Stromdichte einer oszillierenden homogen geladenen Kugel

Ist der Ladungstransport gerichtet wie in einem Leiter brauchen wir hingegen beim Stromfluß eine magnetische Flussdichte die sich um den Leiter windet. Wir betrachten jetzt das Aufladen eines



**Abbildung 17.2:** Der auf die Platte eines Kondensators fließende Strom muss als Verschiebungsstrom  $\epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}$  wieder abfließen. Die magnetische Flussdichte ist stetig.

Plattenkondensators (Abbildung 17.2). Wir umschließen die Kondensatorplatte mit einem infinitesimalen zylindrischen Volumen, so dass die beiden Deckflächen des Zylinders auf verschiedenen Seiten der Kondensatorplatte zu liegen kommen. Die eine Deckfläche wird also vom Strom führenden Leiter durchdrungen, während die zweite Deckfläche im Vakuum liegt, wo weder Ladungen noch Ströme vorkommen. Wir integrieren die Rotation der magnetischen Flussdichte über den Rand des Zylinders, also eine Fläche die selber keinen Rand besitzt.:

$$0 = c^2 \oint_{\partial \partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial V} \left( \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} d^2 S \quad (17.11)$$

Eine Stromlinie  $\mathbf{j}/\epsilon_0$  die mit der Stromdichte in das Volumen einfließt aber nicht mehr herausfließt, muss als Verschiebungssromdichtelinie  $\partial \mathbf{E}/\partial t$  wieder aus dem Volumen herausfließen. Dies geschieht beim Plattenkondensator, indem sich das elektrische Feld zwischen den Platten zeitlich verändert während der Plattenkondensator aufgeladen wird. Die Normalkomponente der Rotation der Flussdichte  $\nabla \times \mathbf{B}$  bleibt deshalb über die Kondensatorplatte hinweg stetig, weswegen sich das Magnetfeld auch zwischen den Kondensatorplatten so um die Symmetrieachse windet, wie um den stromführenden Leiter.

## 17.2 Fundamentale klassische Physik versus phänomenologische klassische Physik

Wir unterscheiden zwischen der fundamentalen klassischen Physik, welche durch die Maxwellgleichungen, die klassischen Bewegungsgleichungen, durch die elektromagnetische und die Gravitationskraft beschrieben wird, und der phänomenologischen klassischen Physik, die aus den Maxwell-

gleichungen in Materie verbunden mit den konstituierenden Gleichungen für bestimmte Materialien beschrieben wird. Wir stellen beiden Satz an Gleichungen einander gegenüber:

**fundamentale klassische Physik**

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_{el} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{F}_{Grav} = -\frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{el} + \mathbf{F}_{Grav} = \frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

**phänomenologische klassische Physik**

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{\rho_{ext}}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j}_{ext} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned} \tag{17.12}$$

$$\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}$$

$$\epsilon_0 c^2 \mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}$$

$$\text{konst. Gl. } \mathbf{D}(\mathbf{E}) = \dots \quad \mathbf{M}(\mathbf{B}) = ..$$

Die fundamentale klassische Physik ist ein in sich geschlossenes System von Gleichungen, mit dem sich im Prinzip die Bewegung aller geladenen Teilchen und die Bewegung der elektromagnetischen Felder vorhersagen lassen. Sie steht aber im Widerspruch zu Experimenten und kann insbesondere die Stabilität der Materie nicht erklären.

Die phänomenologische klassische Physik ist ebenfalls ein geschlossenes System von Bewegungsgleichungen für die elektromagnetischen Felder inklusive der Beschreibung der nicht messbaren zerlegten Felder  $\mathbf{D}, \mathbf{P}, \mathbf{H}, \mathbf{M}$ , mit denen sich die Zukunft der Felder in bestimmten Materialien vorhersagen lässt. Sie sind aber keine fundamentalen physikalischen Gleichungen, da die konstituierenden Gleichungen nur materialspezifisch gelten und nicht universell anwendbar sind.

Eine in sich geschlossene fundamentale Physik muss die klassischen Gleichungen durch quantenmechanische Gleichungen ersetzen, die wir hier aber nicht besprechen werden. Sie werden ein quantenmechanisches Weltbild in der Vorlesung Quantenmechanik kennen lernen.

Die Maxwellgleichungen der phänomenologischen klassischen Physik sind linear, solange die konstituierenden Gleichungen linear sind. Es gibt nichtlineare konstituierende Gleichungen. Als Beispiel einer nichtlinearen konstituierenden Gleichung hatten wir den idealen Ferromagnet mit der Gleichung

$$\mathbf{M} = M_s \frac{\mathbf{B}}{B} \tag{17.13}$$

kennen gelernt.

## 17.3 Fouriertransformierte Maxwell Gleichungen

Die Fouriertransformation ist ein nicht wegzudenkendes Mittel zur Lösung linearer partieller Differentialgleichungen. Wir definieren Felder im direkten und im Fourierraum

$$\begin{array}{ccc} \text{direkter Raum} & & \text{Fourier Raum} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) & & \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \\ & \xleftrightarrow{\text{Fouriertrafo}} & \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) & & \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) \end{array} \tag{17.14}$$

Der Mathematiker verziert die Fouriertransformierten Funktionen  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$  mit einem Hut, um zu zeigen dass  $\hat{\mathbf{E}}$  eine mathematische Funktion ist, die sich von  $\mathbf{E}$  unterscheidet. In der Physik lassen

wir den Hut weg und drücken den Unterschied beider Funktionen dadurch aus, dass die Namen der Argumente der Funktion  $\mathbf{r}, t$  bzw.  $\mathbf{k}, \omega$  klar ausdrücken, ob wir über Funktionen im direkten Raum oder im Fourierraum sprechen. Wir lassen also ab sofort den mathematischen Hut verschwinden und definieren:

$$\mathcal{FT}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)](\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (17.15)$$

mit der Fourierrücktransformation

$$\mathcal{FT}^{-1}[\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)](\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \quad (17.16)$$

Wir berechnen die Divergenz de elektrischen Feldes

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \quad (17.17)$$

und finden so

$$\mathcal{FT}[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)](\mathbf{k}, \omega) = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega). \quad (17.18)$$

Genauso finden wir

$$\mathcal{FT}[\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)](\mathbf{k}, \omega) = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \quad (17.19)$$

$$\mathcal{FT}[\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)](\mathbf{k}, \omega) = -i\omega \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega). \quad (17.20)$$

Differentiationen im direkten Raum werden zu algebraischen Operationen im Fourierraum. Wir schreiben die Maxwellgleichungen im direkten Raum und Fourierraum auf und stellen diese gegenüber:

direkter Raum	Fouriertrafo $\longleftrightarrow$	Fourier Raum
1. $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$		$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\rho(\mathbf{k}, \omega)}{\epsilon_0}$
2. $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}$		$i\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - i\omega \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{0}$
3. $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$		$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = 0$
4. $c^2 \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}$		$c^2 i\mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) + i\omega \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)}{\epsilon_0}$

Wir betrachten die Maxwellgleichungen in der Abwesenheit von Ladungen und Strömen  $\rho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0}$ . Aus Gleichung 17.21.2 folgern wir die Beziehung

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (17.22)$$

Wir setzten 17.22 in Gleichung 17.21.4 ein und erhalten

$$c^2 \mathbf{k} \times \left( \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \right) + \omega \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (17.23)$$

$$c^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \omega^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (17.24)$$

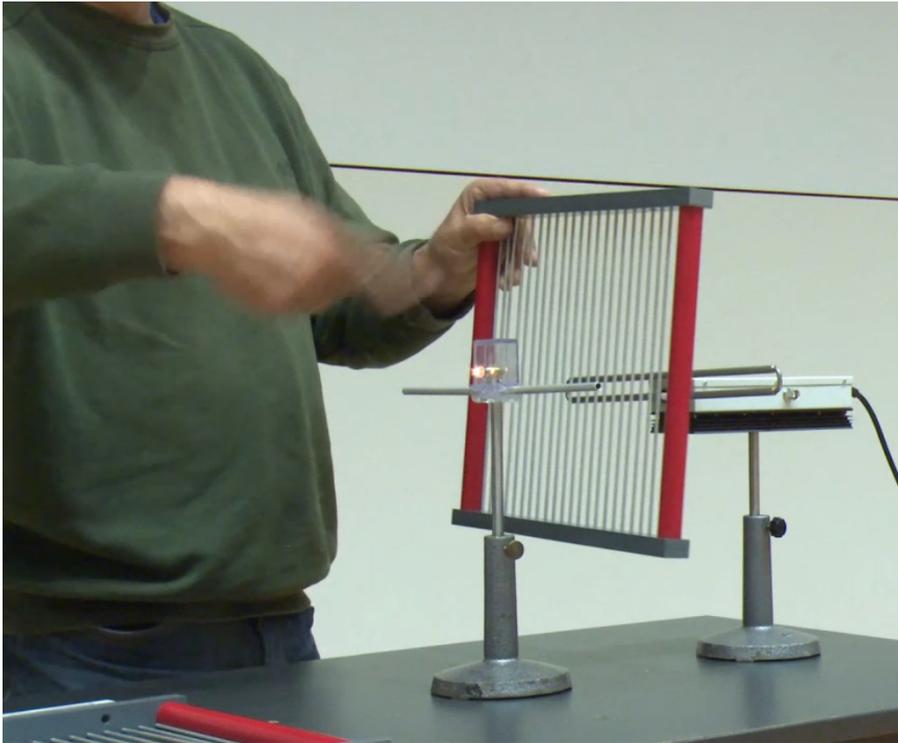
$$c^2 \left( \underset{17.21.1}{\mathbf{k}\mathbf{k}} - k^2 \mathbb{1} \right) \cdot \mathbf{E} + \omega^2 \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (17.25)$$

$$(\omega^2 - k^2 c^2) \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (17.26)$$

Wir transformieren Gleichung 17.26 in den direkten Raum und erhalten die Wellengleichung für das elektrische Feld:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (17.27)$$

Die Wellengleichung ist eine wichtige Gleichung für die Propagation des elektrischen Feldes, die wir in den vor uns liegenden Vorlesungen besprechen werden müssen.



## Kapitel 18

# Elektromagnetische Wellen und deren Quellen

In dieser Vorlesung lösen wir die homogene Maxwellgleichung. Wir führen das elektrische Potenzial und das Vektorpotenzial sowie den Hertzsche Vektor ein. Die elektrische Polarisation ist der Quellterm in der Wellengleichung für den Hertzschen Vektor. Wir zeigen, dass elektromagnetische Wellen im Vakuum transversale Wellen sind. Die Dispersion der Welle wird durch den Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Wellenvektor beschrieben. Die Polarisation der elektromagnetischen Welle ist durch die Richtung des elektrischen Feldes definiert, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der elektromagnetischen Welle und parallel zur elektrischen Polarisation des Metalls.

## 18.1 Das elektrostatische und das Vektorpotenzial

Im Fourierraum lauten die homogenen Maxwellgleichungen

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (18.1)$$

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B} \quad (18.2)$$

Sowohl Gleichung 18.1 als auch Gleichung 18.2 sind algebraische Gleichungen, die wir leicht lösen können.

Schreiben wir die magnetische Flussdichte als

$$\mathbf{B} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A} \quad (18.3)$$

und

$$\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\phi + i\omega\mathbf{A}, \quad (18.4)$$

dann folgt mathematisch

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{k} \cdot (i\mathbf{k} \times \mathbf{A}) = 0, \quad (18.5)$$

sowie

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times (-i\mathbf{k}\phi + i\omega\mathbf{A}) = i\mathbf{k} \times (i\omega\mathbf{A}) = i\omega(i\mathbf{k} \times \mathbf{A}) = i\omega\mathbf{B} \quad (18.6)$$

und die homogenen Maxwellgleichungen sind damit für beliebig gewähltes  $\phi$  und  $\mathbf{A}$  erfüllt. Wählen wir ein anderes Vektorpotenzial und elektrostatisches Potenzial  $\phi'$  und  $\mathbf{A}'$  gemäß:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + i\mathbf{k}\chi \\ \phi' &= \phi + i\omega\chi \end{aligned} \quad (18.7)$$

und berechnen daraus neue elektromagnetische Felder  $\mathbf{E}'$  und  $\mathbf{B}'$ , so finden wir

$$\mathbf{B}' = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}' = i\mathbf{k} \times \mathbf{A} + i\mathbf{k} \times i\mathbf{k}\chi = i\mathbf{k} \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (18.8)$$

$$\mathbf{E}' = -i\mathbf{k}\phi' + i\omega\mathbf{A}' = -i\mathbf{k}\phi - i^2\mathbf{k}\omega\chi + i\omega\mathbf{A} + i^2\mathbf{k}\omega\chi = -i\mathbf{k}\phi + i\omega\mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad (18.9)$$

dass die gestrichenen Felder mit den ursprünglichen Feldern übereinstimmen und beide Sorten Potenziale, gestrichen oder ungestrichen, dieselbe physikalische Situation beschreiben. Wir sagen die Physik ist invariant unter der Eichtransformation 18.7.

Wenn wir die Eichfunktion  $\chi$  zu

$$\chi = -\frac{\omega\phi - c^2\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}}{i(\omega^2 - c^2k^2)} \quad (18.10)$$

wählen, finden wir, dass die gestrichenen Potenziale die Bedingung

$$\begin{aligned} (\omega\phi' - c^2\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}') &= (\omega\phi + i\omega^2\chi - c^2\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} - c^2\mathbf{k} \cdot i\mathbf{k}\chi) \\ &= (\omega\phi - c^2\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} - i(\omega^2 - c^2k^2)\frac{\omega\phi - c^2\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}}{i(\omega^2 - c^2k^2)}) = 0 \end{aligned} \quad (18.11)$$

erfüllt. Erfüllt ein elektrostatisches Potenzial und Vektorpotenzial die Bedingung

$$(\omega\phi' - c^2\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}') = 0, \quad (18.12)$$

so sagt man, die Potenziale liegen in Lorentzform vor.

## 18.2 Lösung der inhomogenen Maxwellgleichung mit Nebenbedingung

Wir drücken die elektromagnetischen Felder in den inhomogenen Maxwellgleichungen durch die Potentiale aus und nehmen an, dass die Potentiale Lorentzgeecht sind. Damit wird aus

$$c^2 i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -i\omega \mathbf{E} + \mathbf{j}/\epsilon_0 \quad (18.13)$$

$$c^2 i\mathbf{k} \times (i\mathbf{k} \times \mathbf{A}) = -i\omega(-i\mathbf{k}\phi + i\omega \mathbf{A}) + \mathbf{j}/\epsilon_0 \quad (18.14)$$

$$c^2(k^2 \mathbb{1} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{A} + \omega \mathbf{k}\phi - \omega^2 \mathbf{A} = \mathbf{j}/\epsilon_0 \quad (18.15)$$

$$(c^2 k^2 - \omega^2) \mathbf{A} + \underbrace{\mathbf{k}(\omega\phi - c^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{A})}_{=0} = \mathbf{j}/\epsilon_0 \quad (18.16)$$

$$\underbrace{\mathbf{k}(\omega\phi - c^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{A})}_{\substack{=0 \\ \text{Lorentzgeicht}}} = \mathbf{j}/\epsilon_0, \quad (18.17)$$

und aus

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (18.18)$$

$$i\mathbf{k} \cdot (-i\mathbf{k}\phi + i\omega \mathbf{A}) = \rho/\epsilon_0 \quad (18.19)$$

$$(c^2 k^2 - \omega^2) \frac{\phi}{c^2} + \frac{\omega}{c^2} \underbrace{(\omega\phi - c^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{A})}_{\substack{=0 \\ \text{Lorentzgeicht}}} = \rho/\epsilon_0 \quad (18.20)$$

wird

$$(c^2 k^2 - \omega^2) \phi / c^2 = \rho / \epsilon_0. \quad (18.21)$$

Fourierrücktransformation in den direkten Raum liefert die beiden Wellengleichungen

$$(c^2 \nabla^2 - \partial_t^2) \mathbf{A} = -\mathbf{j}/\epsilon_0 \quad (18.22)$$

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2) \phi = -\rho/\epsilon_0, \quad (18.23)$$

die unter der Nebenbedingung gelten, dass die Potentiale Lorentzgeecht sind:

$$c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi = 0, \quad (18.24)$$

und dass die Ladungsdichte und Stromdichte die Kontinuitätsgleichung erfüllen:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \partial_t \rho = 0. \quad (18.25)$$

## 18.3 Wellengleichung für den Hertzschen Vektor

Die beiden Nebenbedingungen der Lorentzgeicht und der Kontinuitätsgleichung können wir durch Einführung des Hertzschen Vektors  $\mathbf{Z}$  und der Polarisation  $\mathbf{P}$  erfüllen. Wir schreiben die Potentiale als

$$\phi = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{Z} \quad (18.26)$$

$$\mathbf{A} = \frac{i\omega}{c^2} \mathbf{Z} \quad (18.27)$$

Dann gilt automatisch

$$(\omega\phi - c^2\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) = (\omega i\mathbf{k} \cdot \mathbf{Z} - c^2\mathbf{k} \cdot \frac{i\omega}{c^2}\mathbf{Z}) = 0 \quad (18.28)$$

und die Potentiale sind Lorentzgeeeicht. Wir finden damit die Wellengleichungen

$$(c^2k^2 - \omega^2)\frac{i\omega}{c^2}\mathbf{Z} = \mathbf{j}/\epsilon_0 \quad (18.29)$$

$$(c^2k^2 - \omega^2)i\mathbf{k} \cdot \mathbf{Z}/c^2 = \rho/\epsilon_0 \quad (18.30)$$

Im Experiment variieren wir die (interne) Ladungsdichte und die (interne) Stromdichte in einem Metall, um dann zu sehen wie die elektromagnetischen Felder außerhalb des Metalls sich zeitlich und räumlich verändern. Wir können aber die Ladungsdichte und Stromdichte nicht unabhängig voneinander variieren, da beide über die Kontinuitätsgleichung

$$-i\omega\rho + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (18.31)$$

gekoppelt sind. Wir drücken die Stromdichte und Ladungsdichte durch die Polarisation aus:

$$\rho = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \quad (18.32)$$

$$\mathbf{j} = -i\omega\mathbf{P}, \quad (18.33)$$

mit der die Kontinuitätsgleichung automatisch erfüllt ist. Mit dieser Ersetzung kollabieren die beiden Wellengleichungen 18.29 und 18.30 zu einer einzigen Wellengleichung

$$(\omega^2 - k^2c^2)\frac{\mathbf{Z}}{c^2} = \mathbf{P}/\epsilon_0, \quad (18.34)$$

ohne irgendwelche Nebenbedingungen. Die Potentiale und elektromagnetischen Felder ergeben sich dann über

$$\phi = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{Z} \quad (18.35)$$

$$\mathbf{A} = \frac{i\omega}{c^2}\mathbf{Z} \quad (18.36)$$

$$\mathbf{B} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A} = -\frac{\omega}{c^2}\mathbf{k} \times \mathbf{Z} \quad (18.37)$$

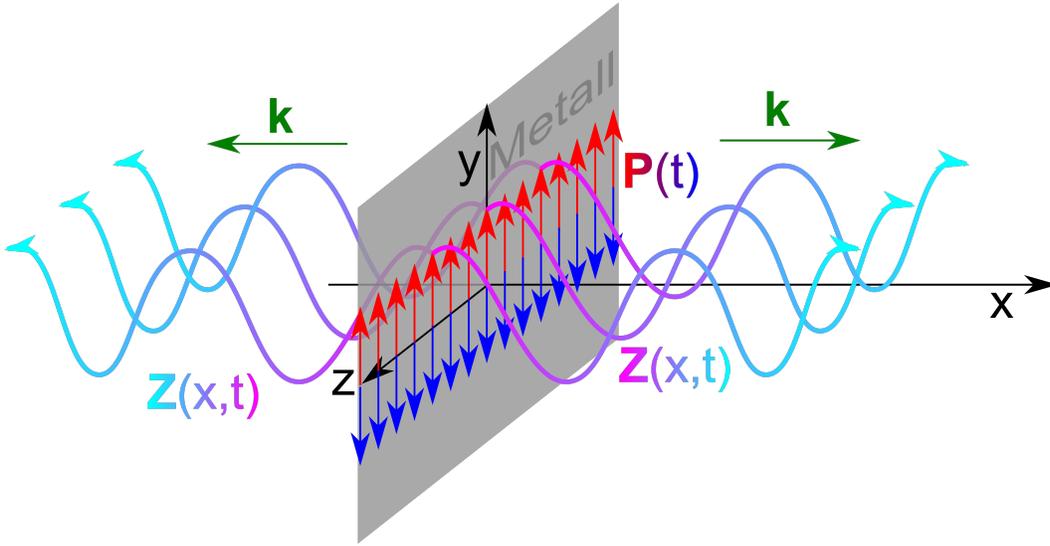
$$\mathbf{E} = -i\mathbf{k}\phi + i\omega\mathbf{A} = \mathbf{k}\mathbf{k} \cdot \mathbf{Z} - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{Z} \quad (18.38)$$

und erfüllen alle Nebenbedingungen.

## 18.4 Eindimensionale Lösung der Wellengleichung mit Quelle

Wir betrachten ein dünnes unendlich ausgedehntes Metall in der  $yz$ -Ebene bei  $x = 0$ , welches wir als Sender für elektromagnetische Wellen, die in die  $\pm x$ -Richtung propagieren benutzen (Abbildung 18.1). Wir nehmen an, dass das Metall periodisch entlang der  $y$ -Richtung polarisiert wird:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{\hat{P}}{ik}e^{i\omega t}\delta(x)\mathbf{e}_y \quad (18.39)$$



**Abbildung 18.1:** Ein dünnes Metall als Sender eindimensionaler elektromagnetischer Wellen

und suchen nach einer Senderlösung, bei der die Polarisation nur auslaufende Wellen der Form

$$\mathbf{Z}(x, t) = \hat{Z} e^{i(\omega t - k|x|)} \mathbf{e}_y = \hat{Z} e^{i(\omega t - kx \operatorname{sign}(x))} \mathbf{e}_y, \quad (18.40)$$

die für  $x < 0$  und  $x > 0$  in entgegengesetzte Richtungen vom Metall fortlaufen, besitzt.

Wir setzen den Ansatz 18.40 in die Fourierrücktransformierte Wellengleichung 18.34 ein.

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) \mathbf{Z} = (-\omega^2 - c^2 \partial_x^2) \mathbf{Z} = -\omega^2 \mathbf{Z} - c^2 \partial_x [(-ik \operatorname{sign}(x)) \mathbf{Z}] \quad (18.41)$$

$$= (k^2 c^2 - \omega^2) \mathbf{Z} - c^2 (-ik) 2\delta(x) \mathbf{Z} \stackrel{!}{=} \frac{\hat{P}}{ik} e^{i\omega t} \delta(x) \mathbf{e}_y \quad (18.42)$$

Das letzte Gleichheitszeichen in Gleichung 18.42 gilt genau dann wenn gilt

$$\omega^2 = k^2 c^2 \quad \text{und} \quad \hat{Z} = \frac{-\hat{P}}{2k^2} \quad (18.43)$$

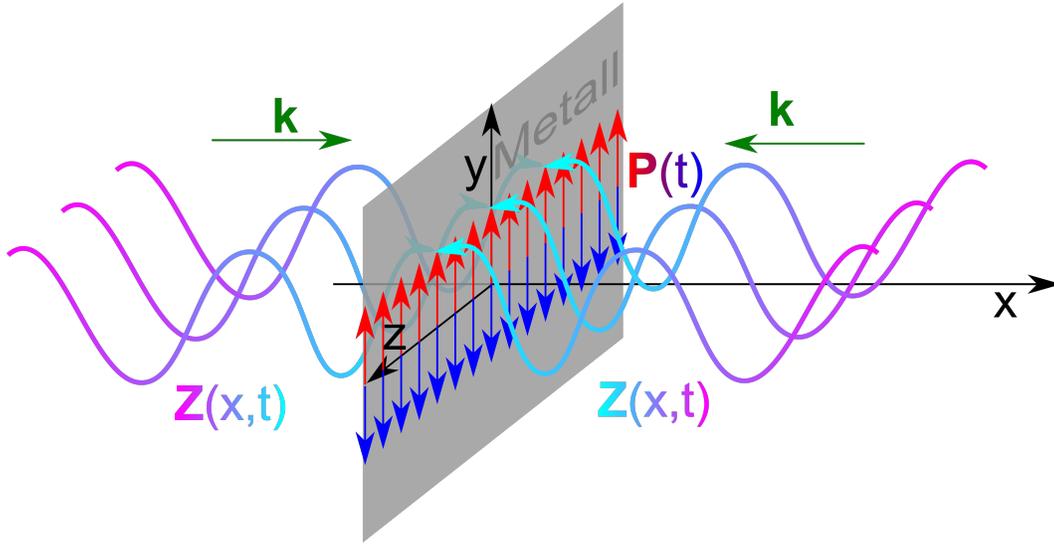
Wir finden also die Lösung

$$\mathbf{Z}(x, t) = \frac{-\hat{P}}{2k^2} e^{i(\omega t - k|x|)} \mathbf{e}_y, \quad (18.44)$$

wobei  $k = \omega/c$ . Die Oszillationen der Polarisation  $\mathbf{P}$  im Metall bei  $z = 0$  ist die Ursache (Quelle) der auslaufenden elektromagnetischen Welle mit derselben Frequenz wie die Frequenz der Polarisation und mit der Wellenlänge  $\lambda = 2\pi/k$ . Die Oszillationen der Polarisation, und damit der Ladungs- und Stromdichte im Metall fungieren als Sender.

Wir erhalten eine weitere Lösung, die Antennenlösung (Abbildung 18.2) wenn wir eine Zeitspiegelung  $t \rightarrow -t$  durchführen bei der die Wellen auf das Metall zulaufen und in diesem die Polarisationsoszillationen anregen.

$$\mathbf{Z}(x, t) = \frac{-\hat{P}}{2k^2} e^{i(-\omega t - k|x|)} \mathbf{e}_y, \quad (18.45)$$



**Abbildung 18.2:** Ein dünnes Metall als Empfänger eindimensionaler elektromagnetischer Wellen

Das Metall absorbiert die einfallenden elektromagnetischen Wellen und setzt die Ladungen im Metall in Bewegung. Das Metall fungiert als Antenne.

## 18.5 Elektrisches Feld und Flussdichte einer ebenen elektromagnetischen Welle

Weit weg vom Sender oder von der Antenne können wir die Welle einfach durch

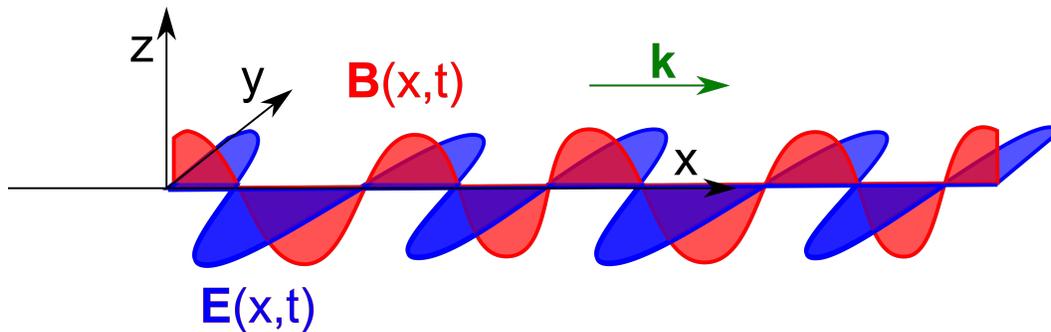
$$\mathbf{Z}(x, t) = \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} \mathbf{e}_y \quad \omega = k_x c \quad (18.46)$$

beschreiben. Wir benutzen die Gleichungen 18.37 und 18.38 und finden die elektromagnetischen Felder

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{\omega}{c^2} \mathbf{k} \times \mathbf{Z} = -\frac{\omega k_x}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y \\ &= -\frac{\omega k_x}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = -\frac{\omega^2}{c^3} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (18.47)$$

$$\mathbf{E} = k_x^2 \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x \mathbf{Z} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{Z} = -\frac{\omega^2}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} \mathbf{e}_y \quad (18.48)$$

Wir sehen, dass elektrisches Feld und Flussdichte in Phase zueinander schwingen, und dass der Wellenvektor  $\mathbf{k}$ , das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und die Flussdichte  $\mathbf{B}$  ein Rechtssystem von orthogonalen Vektoren bilden. Abbildung 18.3. Die Energie der elektromagnetischen Welle im Vakuum bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{c} = \frac{\omega}{k^2} \mathbf{k}$  entlang  $\mathbf{k}$  fort.



**Abbildung 18.3:** Elektrische Feld und magnetische Flussdichte einer ebenen laufenden elektromagnetischen Welle

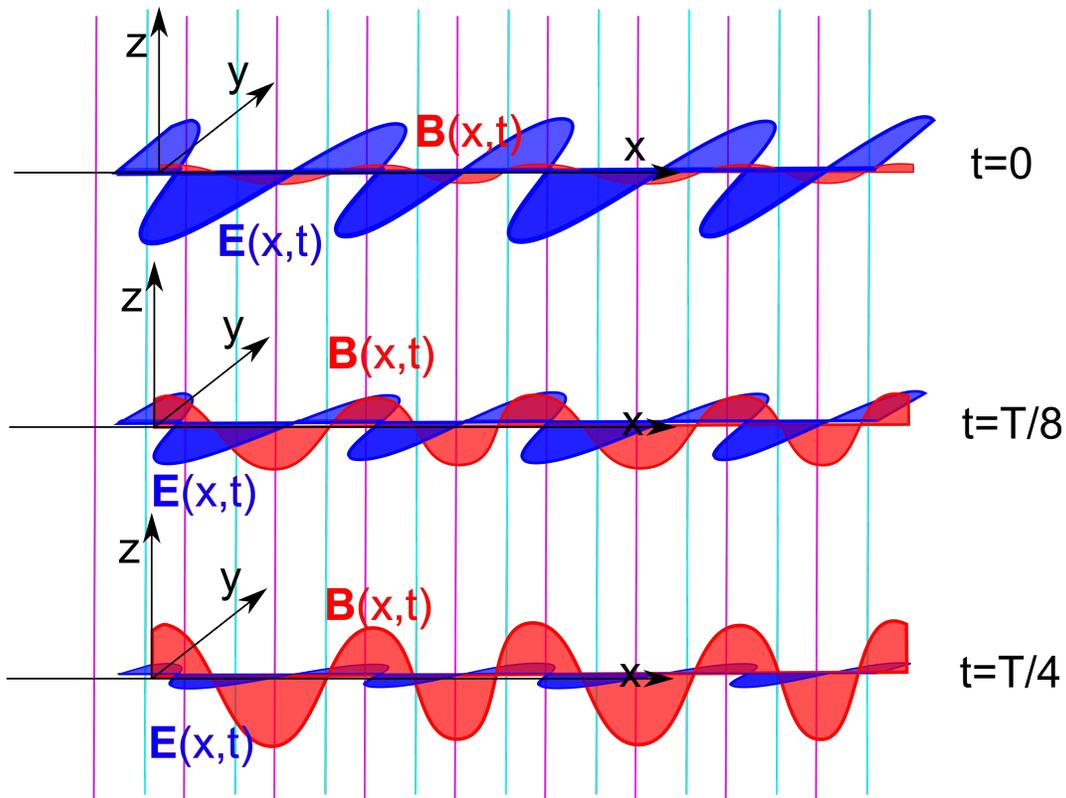
## 18.6 Stehende elektromagnetische Welle

Wir superponieren eine links- mit einer rechts laufenden Welle und finden:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \Re\left(-\frac{\omega k_x}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} \mathbf{e}_z + \frac{\omega k_x}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t + k_x x)} \mathbf{e}_z\right) \\ &= \Re\left(\frac{\omega^2}{c^3} \hat{Z} 2i \sin(k_x x) e^{i\omega t} \mathbf{e}_z\right) = -\frac{2\omega^2}{c^3} \hat{Z} \sin(k_x x) \sin(\omega t) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (18.49)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\Re\left(\frac{\omega^2}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} \mathbf{e}_y + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t + k_x x)} \mathbf{e}_y\right) \\ &= -\Re\left(\frac{2\omega^2}{c^2} \hat{Z} \cos(k_x x) e^{i\omega t} \mathbf{e}_y\right) = -\frac{2\omega^2}{c^2} \hat{Z} \cos(k_x x) \cos(\omega t) \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (18.50)$$

Wir sehen, dass das elektrische Feld und die magnetische Flussdichte sich zeitlich abwechseln und die Bäuche des elektrischen Feldes im Raum, den Knoten der magnetischen Flussdichte entsprechen und umgekehrt (Abbildung 18.4). Die Energie schwingt zwischen den magnetischen Flussdichtebäuchen und den elektrischen Feldbäuchen hin und her.



**Abbildung 18.4:** Elektrische Feld und magnetische Flussdichte einer ebenen stehenden elektromagnetischen Welle bei verschiedenen Zeiten

## 18.7 Fazit

Das elektrostatische Potenzial und das Vektorpotenzial  $\phi$ ,  $\mathbf{A}$  lösen die homogene Maxwellgleichung. Der Hertzsche Vektor  $\mathbf{Z}$  legt die Wahl der Eichung fest auf die Lorentzeichung. Die elektrische Polarisation  $\mathbf{P}$  löst die Kontinuitätsgleichung und ist der Quellterm in der Wellengleichung für den Hertzschen Vektor. Elektromagnetische Wellen im Vakuum sind transversale Wellen bei denen der Wellenvektor  $\mathbf{k}$ , das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  und die Flussdichte  $\mathbf{B}$  ein Rechtssystem von orthogonalen Vektoren bilden. Die Dispersion der Welle wird durch  $\omega = kc$  beschrieben, die Polarisation des elektrischen Feldes ist senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und parallel zur elektrischen Polarisation  $\mathbf{P}$  des Metalls.

## 18.8 Polarisation der elektromagnetischen Welle

Wir fanden in Gleichung 18.47 und Gleichung 18.48 die magnetische Flussdichte und das elektrische Feld einer in  $x$ -Richtung laufenden Welle, bei der das elektrische Feld entlang der  $y$ -Richtung

ausgerichtet ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= -\frac{\omega^2}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{E}_1 &= -\frac{\omega^2}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad y\text{-polarisierte Welle,} \quad (18.51)$$

und nennen diese Welle eine in  $y$ -Richtung linear transversal polarisierte elektromagnetische Welle. Durch Drehung um  $\pi/2$  um die  $x$ -Achse erhalten wir eine in  $z$ -Richtung polarisierte Welle:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2 &= -\frac{\omega^2}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad z\text{-polarisierte Welle.} \quad (18.52)$$

Wir superponieren eine  $y$ -polarisierte Welle mit einer  $z$ -polarisierten Welle:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}_{lr} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}_1 \pm i \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}_2 = \begin{aligned} &-\frac{\omega^2}{c^3} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} (\mathbf{e}_z \pm i \mathbf{e}_y) \\ &-\frac{\omega^2}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} (\mathbf{e}_y \mp i \mathbf{e}_z) \end{aligned} \quad (18.53)$$

$$= \begin{aligned} &-\frac{\omega^2}{c^3} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} (\mathbf{e}_z \pm i \mathbf{e}_y) \\ &\pm i \frac{\omega^2}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} (\mathbf{e}_z \pm i \mathbf{e}_y) \end{aligned} \quad (18.54)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}_{lr} = \begin{aligned} &-\frac{\omega^2}{c^3} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x)} (\mathbf{e}_z \pm i \mathbf{e}_y) \\ &\frac{\omega^2}{c^2} \hat{Z} e^{i(\omega t - k_x x \pm \pi/2)} (\mathbf{e}_z \pm i \mathbf{e}_y) \end{aligned} \quad \text{links(rechts)-polarisierte Welle.} \quad (18.55)$$

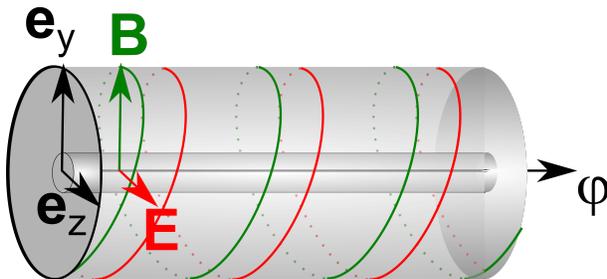
Wir erhalten eine Lösung mit reellen Feldern, wenn wir den Realteil der Lösung 18.55 nehmen und berücksichtigen, dass

$$\Re(e^{i\phi} (\mathbf{e}_z \pm i \mathbf{e}_y)) = \mathbf{e}_z \cos \phi \mp \mathbf{e}_y \sin \phi \quad (18.56)$$

gilt:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}_{lr} = \begin{aligned} &\hat{B} (\mathbf{e}_z \cos(\omega t - k_x x) \mp \mathbf{e}_y \sin(\omega t - k_x x)) \\ &\hat{E} (\mathbf{e}_z \cos(\omega t - k_x x \pm \pi/2) \mp \mathbf{e}_y \sin(\omega t - k_x x \pm \pi/2)) \end{aligned} \quad (18.57)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}_{lr} = \begin{aligned} &\hat{B} (\mathbf{e}_z \cos(\omega t - k_x x) \mp \mathbf{e}_y \sin(\omega t - k_x x)) \\ &\hat{E} (\mp \mathbf{e}_z \sin(\omega t - k_x x) - \mathbf{e}_y \cos(\omega t - k_x x)) \end{aligned} \quad \text{links(rechts)-polarisierte Welle} \quad (18.58)$$



**Abbildung 18.5:** Elektrische Feld und magnetische Flussdichte einer ebenen zirkular polarisierten elektromagnetischen Welle

Die Lösungen 18.57 heißen links (rechts) zirkular transversal polarisierte elektromagnetische Welle. Die magnetische Flussdichte und das elektrische Feld winden sich dabei phasenversetzt um den Wellenvektor  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x$  (Abbildung 18.5).

Mit welchen Polarisationsarten wir im Vakuum die elektromagnetischen Wellen beschreiben bleibt uns überlassen weil das Vakuum isotrop ist. In anisotropen bzw. chiralen Materialien wird die Wahl der Polarisation nicht mehr egal sein.

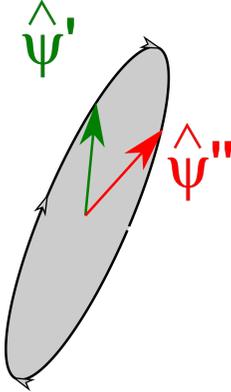
Wir betrachten eine allgemeine Vektorwelle der Form

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) = (\hat{\psi}_x \mathbf{e}_x + \hat{\psi}_y \mathbf{e}_y + \hat{\psi}_z \mathbf{e}_z) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (18.59)$$

und wir zerlegen die Komponenten des Amplitudenvektors  $\hat{\psi}_{x,y,z} = \hat{\psi}'_{x,y,z} + i\hat{\psi}''_{x,y,z}$  in seine Real und Imaginärteile. Dann finden wir für den physikalischen Realteil der Vektorwelle.

$$\Re \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\psi}' \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \hat{\psi}'' \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (18.60)$$

Der Vektor  $\Re \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t)$  liegt also in der durch  $\hat{\psi}'$  und  $\hat{\psi}''$  aufgespannten Ebene und läuft mit der Phase  $\phi = (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  als Funktion von  $\phi$  auf der Ellipse  $\hat{\psi}' \cos \phi - \hat{\psi}'' \sin \phi$  (Abbildung 18.6). Die allgemeine Polarisation einer Vektorwelle ist eine elliptische Polarisation.



**Abbildung 18.6:** Elliptische Polarisation einer Vektorwelle

Eine Ellipse kann zu einer Linie entarten, so dass lineare Polarisation vorliegt. Sie kann aber auch zu einem Kreis entarten, so dass zirkulare Polarisation vorliegt. Gegenüber einer Skalarwelle, die durch eine Dispersionsrelation  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  charakterisiert ist, ist eine Vektorwelle durch eine im allgemeinen polarisationsabhängige Dispersion  $\omega = \omega_\lambda(\mathbf{k})$  und eine Polarisation  $\hat{\psi} = \hat{\psi}' + i\hat{\psi}''$  charakterisiert. Beachten Sie, dass eine elektromagnetische Welle nur dann eine Vektorwelle ist, wenn wir und auf entweder das elektrische Feld oder die Flussdichte beschränken. Betrachten wir den beide Felder enthaltenden elektromagnetischen Feldtensor  $\mathcal{F}$ , so ist die volle elektromagnetische Welle eine Tensorwelle.

## 18.9 Übungen

### 18.9.1 Abberation

Sie machen Urlaub auf der Sonne, wo sie von Coronaentladungen unbeeindruckt einen Fixstern beobachten, der am Firmament genau senkrecht zur Erdbahn platziert ist. Lorentztransformieren Sie die einfallende Welle des Fixsterns ins Ruhesystem der Erde. Wo beobachtet ein Erdbewohner die Position des Fixsterns über das Jahr hinweg?

### 18.9.2 Laser im Spaceship

Ein Laser besteht aus zwei Spiegeln zwischen denen eine stehende elektromagnetische Welle eingesperrt ist. Captain Picard fliegt mit halber Lichtgeschwindigkeit von Ihnen weg und hat einen Laser quer (längs) zur Bewegungsrichtung geladen. Beschreiben Sie den Vorgang im Laser aus Ihrer Perspektive.

### 18.9.3 Experiment: In der Mikrowelle

Die Frequenz der Mikrowellen in Haushalts-Mikrowellengeräten beträgt 2450 MHz. Dies entspricht einer Wellenlänge in der Luft von 12,25 cm. Vermessen Sie Ihre Mikrowelle. Sind die Abmessungen Vielfache der halben Wellenlänge? Nehmen Sie ein Set aus zwölf Schnapsgläsern und füllen Sie sechs davon mit Wasser und sechs davon mit Schnaps. Platzieren Sie jeweils 6 Gläser im Abstand einer Viertelwellenlänge (Dreiviertelwellenlänge) in eine nicht rotierende Stellung in der Mikrowelle (Sie können die Mikrowelle auf den Kopf stellen). Messen Sie die Temperatur in den Gläsern nach dem Heizen. Können Sie die stehende Welle messen? Wie unterscheidet sich die Aufheizung von Wasser von der von Schnaps?

### 18.9.4 Programmierung: Ausgedehnte Quellen

Die allgemeine Lösung der eindimensionalen elektromagnetischen Welle zu einer Polarisation der Form

$$\mathbf{P}(x, t) = \frac{\hat{P}(x)}{ik} e^{i\omega t} \mathbf{e}_y$$

ist durch

$$\mathbf{Z}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{-\hat{P}(x')}{2k^2} e^{i(\omega t - k|x-x'|)} \mathbf{e}_y,$$

gegeben. Betrachten Sie eine Metallplatte der Dicke  $d$  and der Stelle  $0 < x < d$  deren Polarisation dort  $\hat{P}(x) = \sin(qx)$  bzw.  $\hat{P}(x) = \sinh(qx)$  beträgt und außerhalb der Metallplatte verschwindet. Berechnen Sie numerisch oder auch analytisch den Hertzschen Vektor für alle  $x$ .



## Kapitel 19

# Elektromagnetische Wellen in und an Metallen

In dieser Vorlesung beschreiben wir das Verhalten eines Metalls über viele Größenordnungen der Frequenz mittels der relativen frequenzabhängigen Dielektrizitätskonstante. Wir unterscheiden drei Frequenzregimes, ein dissipatives Regime, in der Stöße der Elektronen das Geschehen dominieren, ein intransparentes Regime unterhalb der Plasmafrequenz, indem das Metall elektromagnetische Wellen reflektiert und ein transparentes Regime oberhalb der Plasmafrequenz, indem elektromagnetische Wellen das Metall passieren können. Wir erklären die Skintiefe mit der parallel zum Metall propagierende Wellen ins Metall eindringen und wir beschreiben voll evaneszente elektromagnetische Grenzflächenwellen, die als Oberflächenplasmonen bezeichnet werden.

## 19.1 Lineare Antwort von Elektronen auf elektrische Felder

Die linearisierte Navier-Stokes Gleichung für die Elektronen in der Kontinuumsnäherung lautet:

$$m_e n \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = \mathbf{f}, \quad (19.1)$$

mit der Kraftdichte:

$$\mathbf{f} = \begin{array}{l} ne\mathbf{E} \\ \text{beschleunigendes } \mathbf{E}\text{-Feld} \\ \text{Coulombkraftdichte} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} -nm_e\mathbf{v}/\tau \\ \text{abbremmende Stöße} \\ \text{verantwortlich für} \\ \text{Widerstand} \end{array}, \quad (19.2)$$

in der wir die zwei wesentlichen Prozesse in einem Metall berücksichtigen, die wir in Vorlesung 5 und Vorlesung 14 besprochen haben. Zum einen baut sich durch die Abweichung der Elektronendichte von der Gleichgewichtselektronendichte ein elektrisches Feld auf, welches die Elektronendichte auf der Zeitskala  $t \approx 1/\omega_p$  mit der Plasmafrequenz

$$\omega_p^2 = \frac{n e^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (19.3)$$

zur das Metall neutralisierenden Gleichgewichtsdichte zurückdrängt. Zum anderen hatten wir in Vorlesung 14 gesehen, dass die semiklassischen (beweglichen) Elektronen innerhalb einer mittleren Stoßzeit  $\tau$  mit ihrer Umgebung durch Stöße thermalisiert werden und deshalb einer Impulsverlustrate von  $-m_e\mathbf{v}/\tau$  unterliegen.

Wir setzen die Kraftdichte 19.2 in die Navier-Stokesgleichung 19.1 ein, ersetzen die Teilchendichte  $n$  durch die Plasmafrequenz 19.3, die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  durch die Stromdichte  $\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}$ , und die Stoßzeit durch die Gleichstromleitfähigkeit

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m_e} \quad (19.4)$$

womit die linearisierte Navier-Stokesgleichung die Form

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \epsilon_0 \omega_p^2 (\mathbf{E} - \mathbf{j}/\sigma_0) \quad (19.5)$$

annimmt. Wir Fouriertransformieren Gleichung 19.5 und erhalten

$$-i\omega \mathbf{j} = \epsilon_0 \omega_p^2 (\mathbf{E} - \mathbf{j}/\sigma_0). \quad (19.6)$$

Wir lösen Gleichung 19.6 nach der Stromdichte auf und finden

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma_0}{1 - \frac{i\omega\sigma_0}{\epsilon_0\omega_p^2}} \mathbf{E}. \quad (19.7)$$

Die Gleichung 19.7 hat die Form eines Ohmschen Gesetzes

$$\mathbf{j}(\omega) = \sigma(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (19.8)$$

mit der komplexen kreisfrequenzabhängigen dynamischen Leitfähigkeit

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - \frac{i\omega\sigma_0}{\epsilon_0\omega_p^2}}, \quad (19.9)$$

die durch zwei Zeitskalen, der mittleren Stoßzeit 19.4 und der inversen Plasmafrequenz 19.3 bestimmt ist.

Die Stromdichte im Metall ist eine interne Stromdichte und gemäss der inhomogenen Maxwellgleichung  $\epsilon_0 c^2 \nabla \times \vec{B} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$  und der Beziehung  $\epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}$  finden wir

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{int} = \partial_t \mathbf{P} \quad (19.10)$$

bzw.

$$\mathbf{j}(\omega) = -i\omega \mathbf{P}. \quad (19.11)$$

Wir setzen Gleichung 19.11 in Gleichung 19.7 ein und finden einen linearen Zusammenhang zwischen der dynamischen Polarisierung und dem elektrischen Feld:

$$\mathbf{P}(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{-i\omega} \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}. \quad (19.12)$$

Wie in der Elektrostatik auch bezeichnen wir die Proportionalitätskonstante zwischen Polarisierung und elektrischem Feld als die komplexe dynamische elektrische Suszeptibilität.

$$\chi(\omega) = \frac{1}{-i\omega\sigma_0^{-1} - \omega^2/\omega_p^2}. \quad (19.13)$$

Statt der Suszeptibilität können wir auch eine dynamische relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r(\omega)$  benutzen deren Frequenzabhängigkeit wir aus der Gleichung

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\omega) + \mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0 (1 + \chi(\omega)) \mathbf{E}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (19.14)$$

zusammen mit Gleichung 19.13 ablesen können:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\tau^{-1}} \quad (19.15)$$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} + i \frac{\omega_p^2}{\omega\tau(\omega^2 + \tau^{-2})} = \epsilon_r'(\omega) + i\epsilon_r''(\omega), \quad (19.16)$$

und die wir in ihren Realteil  $\epsilon_r'(\omega)$  und Imaginärteil  $\epsilon_r''(\omega)$  aufgeteilt haben. Wir sehen, dass die Beschreibung eines Metalls über den gesamten Frequenzbereich durch eine komplexe dynamische Leitfähigkeit  $\sigma(\omega)$ , äquivalent ist zur Beschreibung durch eine komplexe Suszeptibilität  $\chi(\omega)$ , komplexe relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r(\omega)$ , oder auch durch einen komplexen Brechungsindex  $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$ , den Sie bitte nicht mit der Elektronendichte  $n$  verwechseln. Welche Beschreibung Sie bevorzugen hängt davon ab, in welchem Frequenzbereich Sie vorzugsweise ihre Experimente durchführen. Der Elektroniker bevorzugt wahrscheinlich die komplexe Leitfähigkeit, der Optiker liebt die komplexe relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r(\omega)$  oder vielleicht auch den Brechungsindex. Wir wollen hier der relativen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r(\omega)$  den Vorzug geben.

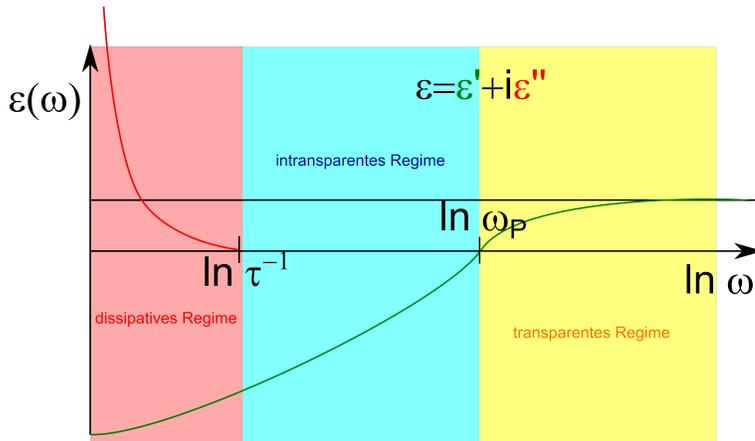


Abbildung 19.1: Komplexe Dielektrizitätskonstante eines Metalls als Funktion der Frequenz

In Abbildung 19.1 haben wir die relative Dielektrizitätskonstante eines Metalls gegenüber dem Logarithmus der Kreisfrequenz aufgetragen. In der Auftragung beobachten wir drei unterschiedliche Frequenzbereiche. Im Bereich  $\omega < \tau^{-1}$  dominiert der Imaginärteil der relativen Dielektrizitätskonstante. Dieses Regime ist ein dissipatives Regime, indem die Elektronen Energie in Form von Wärme dissipieren. Stromdichte und elektrisches Feld sind dort in Phase, wie wir das für elektrische Widerstände gewohnt sind. Der Bereich  $\tau^{-1} < \omega < \omega_p$  ist das intransparente Regime. Der Realteil der relativen Dielektrizitätskonstante ist negativ und dominiert über den Imaginärteil. Stromdichte und elektrisches Feld sind um  $\pi/2$  phasenverschoben, die Leistungsdichte  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$  ist eine reine Blindleistungsdichte, und jegliche elektromagnetische Welle wird in diesem Frequenzbereich vom Metall zurückreflektiert. In diesem Bereich fungiert das Metall als ein idealer Spiegel. Oberhalb der Plasmafrequenz  $\omega > \omega_p$  wird das Metall transparent. Die Elektronen sind nicht mehr in der Lage dem extern aufoktruiertem elektrischen Feld zu folgen um dies noch substantiell durch aufbauen einer Polarisation zu verändern und die Welle durchläuft das Metall ungedämpft mit einer Phasengeschwindigkeit  $v = \sqrt{\epsilon_r}c$ , die langsamer als Lichtgeschwindigkeit ist. Ein reales Metall zeigt eine relative Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r(\omega)$  die als Funktion der Frequenz komplizierter ist, als unser einfaches Modell 19.16. Die drei Frequenzregimes kommen jedoch in jedem Metall vor und werden nicht durch Detaileffekte spezifischer Metalle zerstört.

Wir wollen dies etwas genauer studieren und formulieren deshalb die Wellengleichung in einem Metall in der Abwesenheit externer Ladungen.

## 19.2 Elektromagnetische Wellen in und an Metallen

Wir schreiben die Maxwellgleichungen ohne externe Ladungen für eine Metall im direkten und im Fourierraum auf:

	direkter Raum	Fouriertrafo ↔	Fourier Raum
1.	$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0$		$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = 0$
2.	$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}$		$i\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - i\omega \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{0}$
3.	$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$		$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = 0$
4.	$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{0}$		$i\mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) + i\omega \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{0},$

(19.17)

benutzen die konstituierende Gleichung  $\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\omega)$  und  $\mathbf{H} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M}$  mit  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ , und finden so

1.  $\epsilon_r(\omega) \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = 0$
2.  $\mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \omega \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$
3.  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = 0$
4.  $c^2 \mathbf{k} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = -\omega \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega),$

(19.18)

Wir setzen Gleichung 19.18.2 in Gleichung 19.18.4 ein und erhalten

$$c^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\omega^2 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E} \quad (19.19)$$

$$[c^2 \mathbf{k} \mathbf{k} - k^2 c^2 \mathbb{1} + \omega^2 \epsilon_r(\omega) \mathbb{1}] \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (19.20)$$

Wir setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_x$ , so dass die Welle in  $x$ -Richtung läuft und finden

$$\left[ (\omega^2 \epsilon_r(\omega) - k^2 c^2) \mathbb{1} + \begin{pmatrix} k^2 c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (19.21)$$

$$\begin{pmatrix} \omega^2 \epsilon_r(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 \epsilon_r(\omega) - k^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \epsilon_r(\omega) - k^2 c^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (19.22)$$

Damit Gleichung 19.22 für nicht verschwindendes  $\mathbf{E}$ -Feld gelten kann muss die Determinante der Matrix in Gleichung 19.22 verschwinden

$$(\omega^2 \epsilon_r(\omega) - k^2 c^2)^2 \omega^2 \epsilon_r(\omega) = 0 \quad (19.23)$$

Wir finden die drei Lösungen:

- 1., 2.)  $\omega^2 \epsilon_r(\omega) = k^2 c^2 \quad \mathbf{E}_1 = E \mathbf{e}_y, \mathbf{E}_2 = E \mathbf{e}_z$
- 3.)  $\epsilon_r(\omega) = 0 \quad \mathbf{E}_3 = E \mathbf{e}_x$

(19.24)

Die Lösung 19.24.3 beschreibt eine longitudinale elektromagnetische Welle für  $\epsilon_r(\omega) = 0$ , was im Metall genau für die Plasmafrequenz  $\omega = \omega_P$  der Fall ist. Die Plasmaoszillationen, die wir bereits in Vorlesung 5 kennen gelernt haben sind also longitudinale Wellen fester Frequenz der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{E} \mathbf{e}_x e^{i(\omega t - k_x x)} \quad (19.25)$$

mit der eine Ladungsdichtewelle der Form

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -i \epsilon_0 k_x \hat{E} e^{i(\omega t - k_x x)} \quad (19.26)$$

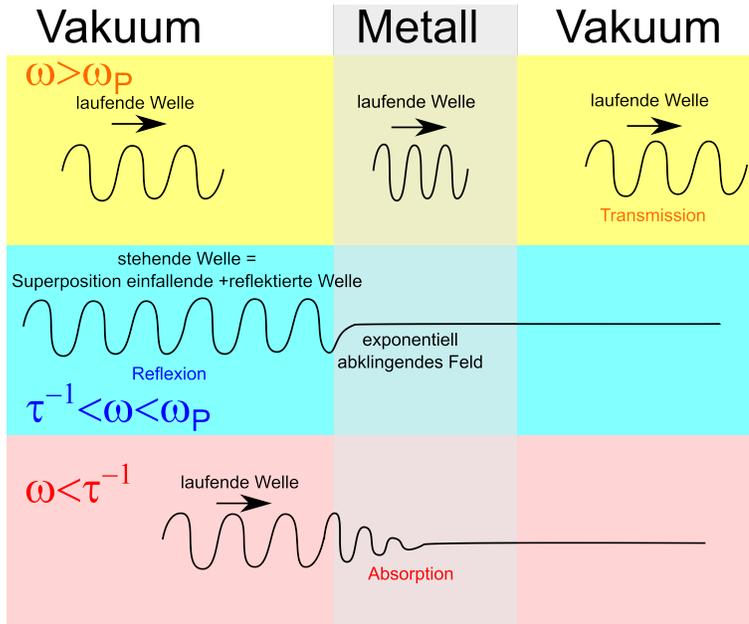


Abbildung 19.2: Verhalten einer senkrecht auf ein Metall einfallender elektromagnetischen Welle

verbunden ist.

Des weiteren finden wir zwei transversale  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$  elektromagnetische Wellen der Dispersion

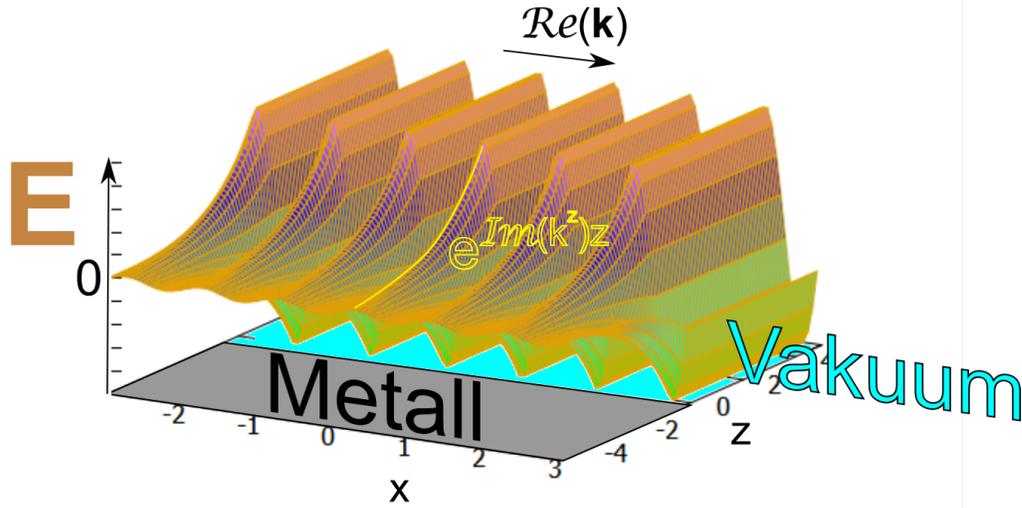
$$k^{-1} = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\epsilon_r(\omega)} \quad (19.27)$$

die für Frequenzen  $\omega > \omega_p$  eine ebene Welle mit reellem  $k^{-1}$  bzw. reellem  $k$  darstellt, für  $\tau^{-1} < \omega < \omega_p$  zu einer exponentiell abfallenden Welle  $\mathbf{E} \propto e^{-\kappa x} e^{i\omega t}$  mit  $\kappa = \Im k$  wird, und im dissipativen Bereich  $\omega < \tau^{-1}$ , indem  $\epsilon_r$  imaginär ist, eine gedämpfte oszillierende Welle der Form  $\mathbf{E} \propto e^{-\Im \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \Re \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$  mit  $\Im \mathbf{k} \approx \Re \mathbf{k}$  vergleichbarer Wellenlänge und Abfallslänge wird. In Abbildung 19.2 zeigen wir das Verhalten einer aus dem Vakuum auf ein Metall der Dicke  $d$  senkrecht einfallenden elektromagnetischen Welle für die drei Frequenzbereiche. Die Welle wird ungedämpft transmittiert für  $\omega > \omega_p$ , reflektiert für  $\tau^{-1} < \omega < \omega_p$ , und absorbiert für  $\omega < \tau^{-1}$ .

### 19.3 Normaler und anormaler Skineffekt

Wir betrachten eine Metall/Vakuum-Grenzfläche bei  $z = 0$ . Für  $z < 0$  sei das Material metallisch und bei  $z > 0$  liege ein Vakuum vor. Im Vakuum laufe die elektromagnetische Welle entlang der  $x$ -Richtung, also parallel zur Grenzfläche (Abbildung 19.3)

$$\mathbf{E}_V \propto e^{i(k_x^V x - \omega t)}. \quad (19.28)$$



**Abbildung 19.3:** Eine ebene längs einer Metall/Vakuum-Grenzfläche propagierende elektromagnetische Welle dringt über den Skineffekt exponentiell gedämpft in ein Metall ein.

Im Metall laufe die Welle mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k}^M = k_x^M \mathbf{e}_x + k_z^M \mathbf{e}_z$ . Aus Stetigkeitsgründen müssen die Parallelkomponenten beider Wellenvektoren übereinstimmen.

$$k_x^M = k_x^V \quad (19.29)$$

Die  $z$ -Komponente des metallischen Wellenvektors beträgt dann

$$ck_z^M = \sqrt{\epsilon_r^M \omega^2 - (k_x^M c)^2} = \sqrt{\epsilon_r^M \omega^2 - (k_x^V c)^2} = \sqrt{(\epsilon_r^M - 1)\omega^2} \quad (19.30)$$

Wir interessieren uns für die Eindringtiefe  $\Im(k_z^M)^{-1}$ , mit der die Welle exponentiell in das Metall eindringt und finden unter Benutzung der Dielektrizitätskonstante des Metalls:

$$\Im \frac{1}{k_z^M} = \frac{c}{\sqrt{-\frac{\omega_p^2 \omega^2}{\omega^2 + i\omega\tau^{-1}}}} \quad (19.31)$$

$$= \Im c \sqrt{-\frac{\omega + i\tau^{-1}}{\omega_p^2 \omega}} = \Im \begin{cases} \frac{c}{\omega_p} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\omega\tau}} & \text{für } \omega < \frac{1}{\tau} \\ \frac{ic}{\omega_p} & \text{für } \omega > \frac{1}{\tau} \end{cases} \quad (19.32)$$

$$= \begin{cases} \frac{c}{\omega_p} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\omega\tau}} & \text{für } \omega < \frac{1}{\tau} \\ \frac{c}{\omega_p} & \text{für } \omega > \frac{1}{\tau} \end{cases} \quad (19.33)$$

In Abbildung 19.4 haben wir die Skintiefe als Funktion der Frequenz aufgetragen. Im dissipativen Regime fällt die Eindringtiefe mit der Frequenz ab, was als normaler Skieffekt bezeichnet wird. Im

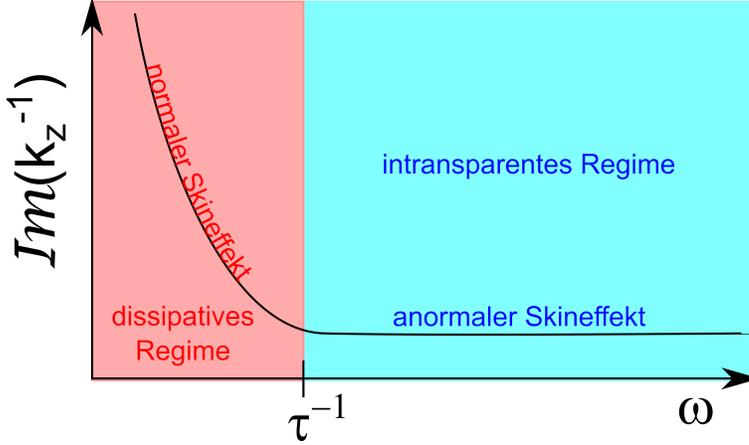


Abbildung 19.4: Verhalten der Skintiefe als Funktion der Frequenz

intransparenten Regime ist die Skintiefe konstant, was als anormaler Skineffekt bezeichnet wird. Für sehr niedrige Frequenz dringt die Welle vollständig in das Metall ein. Bei solch niedrigen Frequenzen ist es möglich elektrische Ströme im Metall zu leiten. Mit zunehmender Frequenz werden elektrische Ströme zunehmend an der Metalloberfläche geleitet. Im Gigahertzbereich ist der Hauptenergiestrom der Welle im Vakuum, nicht mehr im Metall. Man verwendet in diesem Bereich Hohlraumleiter, die wir in Vorlesung 20 besprechen werden.

## 19.4 Oberflächenplasmonen

Es gibt auch elektromagnetische Wellen die voll an der Vakuum/Metall-Grenzfläche konzentriert sind und ausschließlich parallel zur Grenzfläche propagieren. Senkrecht zur Grenzfläche fallen diese evaneszenten Wellen exponentiell in das jeweilige Material ab. Wir betrachten wieder eine Metall/Vakuum-Grenzfläche und suchen nach einer Welle der Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}} e^{-i\omega t + ik_{||}x} e^{\pm \kappa_{M,V}z} \quad (19.34)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}} e^{-i\omega t + ik_{||}x} e^{\pm \kappa_{M,V}z}, \quad (19.35)$$

mit den Wellenvektoren

$$\mathbf{k}^{M,V} = k_{||}\mathbf{e}_x \mp i\kappa_{M,V}\mathbf{e}_z, \quad (19.36)$$

die in  $x$ -Richtung mit reellem Wellenvektor  $k_{||}$  propagieren und in  $\pm z$ -Richtung von der Grenzfläche weg abfallen. Aus der Maxwellgleichung  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  folgern wir

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = k_{||}B_x^{M,V} \mp i\kappa_{M,V}B_z^{M,V} = 0 \quad (19.37)$$

$$B_z^{M,V} = \pm \frac{k_{||}}{i\kappa_{M,V}} B_x^{M,V} \quad (19.38)$$

An der Grenzfläche muss die magnetische Flussdichte stetig sein  $B_x^M = B_x^V$ ,  $B_y^M = B_y^V$ ,  $B_z^M = B_z^V$ . Aus  $B_x^M = B_x^V$  folgt mit Gleichung 19.37, dass  $(\kappa_M + \kappa_V)B_z = 0$ . Weil wir fordern dass beide

Wellen von der Grenzfläche exponentiell abfallen ist  $\Re(\kappa_M + \kappa_V) > 0$  und es folgt, dass die  $z$ - und  $x$ -Komponente der magnetischen Flussdichte verschwinden müssen  $B_z = 0 = B_x$ . Die Flussdichtewelle hat also die Form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{B} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\omega t + ik_{\parallel}x} e^{\pm\kappa_{M,V}z} \quad (19.39)$$

Aus der inhomogenen Maxwellgleichung ohne externe Stromdichten

$$i\omega\mathbf{D} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{B})\epsilon_0 c^2 \quad (19.40)$$

berechnen wir zusammen mit  $\mathbf{D} = \epsilon_r(\omega)^{M,V} \mathbf{E}$  die Amplitude des elektrischen Feldes

$$\hat{\mathbf{E}}^{M,V} = -\frac{c^2}{\omega\epsilon_r(\omega)^{M,V}} \begin{pmatrix} k_{\parallel} \\ 0 \\ \mp i\kappa_{M,V} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{B} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\hat{B}c^2}{\omega\epsilon_r(\omega)^{M,V}} \begin{pmatrix} \pm i\kappa_{M,V} \\ 0 \\ k_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (19.41)$$

Wir überprüfen die homogene Maxwellgleichung

$$-i\omega\mathbf{B}^{M,V} = -i\mathbf{k}^{M,V} \times \mathbf{E}^{M,V} \quad (19.42)$$

$$-i\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{B} \\ 0 \end{pmatrix} = i\frac{\hat{B}c^2}{\omega\epsilon_r(\omega)^{M,V}} \begin{pmatrix} k_{\parallel} \\ 0 \\ \mp i\kappa_{M,V} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \pm i\kappa_{M,V} \\ 0 \\ k_{\parallel} \end{pmatrix} = -i\frac{\hat{B}c^2}{\omega\epsilon_r(\omega)^{M,V}} \begin{pmatrix} 0 \\ (\kappa_{M,V})^2 - k_{\parallel}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19.43)$$

und finden die Dispersionsrelationen der Einzelmaterien

$$\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r(\omega)^{M,V} = (k^2)^{M,V} = k_{\parallel}^2 - \kappa_{M,V}^2 \quad (19.44)$$

wieder. Man überzeugt sich, dass die Maxwellgleichung  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$  wegen

$$\begin{pmatrix} k_{\parallel} \\ 0 \\ \mp i\kappa_{M,V} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pm i\kappa_{M,V} \\ 0 \\ k_{\parallel} \end{pmatrix} = 0 \quad (19.45)$$

erfüllt ist. Die  $z$ -Komponente der dielektrischen Verschiebung ist stetig denn

$$\hat{D}_z^M = -\frac{\hat{B}c^2}{\omega\epsilon_r(\omega)^M} k_{\parallel}\epsilon_r(\omega)^M = -\frac{\hat{B}c^2}{\omega\epsilon_r(\omega)^V} k_{\parallel}\epsilon_r(\omega)^V = \hat{D}_z^V. \quad (19.46)$$

Die  $y$ -Komponente des elektrischen Feldes ist stetig, denn sie verschwindet für beide Materialien. Aus der Stetigkeit der  $x$ -Komponente des elektrischen Feldes folgern wir

$$\frac{\kappa_M}{\epsilon_r(\omega)^M} = -\frac{\kappa_V}{\epsilon_r(\omega)^V} = -\kappa_V \quad (19.47)$$

$$\kappa_M = -\kappa_V\epsilon_r(\omega)^M \quad (19.48)$$

Da wir fordern, dass  $\kappa_M, \kappa_V > 0$ , kann Gleichung 19.48 nur erfüllt sein wenn  $\epsilon_r(\omega)^M < 0$  gilt, das heißt, dass die Frequenz  $\omega < \omega_p$  kleiner als die Plasmafrequenz des Metalls sein muss.

Wir eliminieren  $\kappa_V$  und  $\kappa_M$  in der Gleichung 19.48 unter Benutzung der Dispersionsrelationen der Einzelmaterialien 19.44 und finden

$$\epsilon_r(\omega)^M \frac{\omega^2}{c^2} \stackrel{19.44.M}{=} k_{||}^2 - \kappa_M^2 \stackrel{19.48}{=} k_{||}^2 - \epsilon_r^2(\omega)^M \kappa_V^2 \stackrel{19.44.V}{=} k_{||}^2 - \epsilon_r^2(\omega)^M \left( \kappa_{||}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right). \quad (19.49)$$

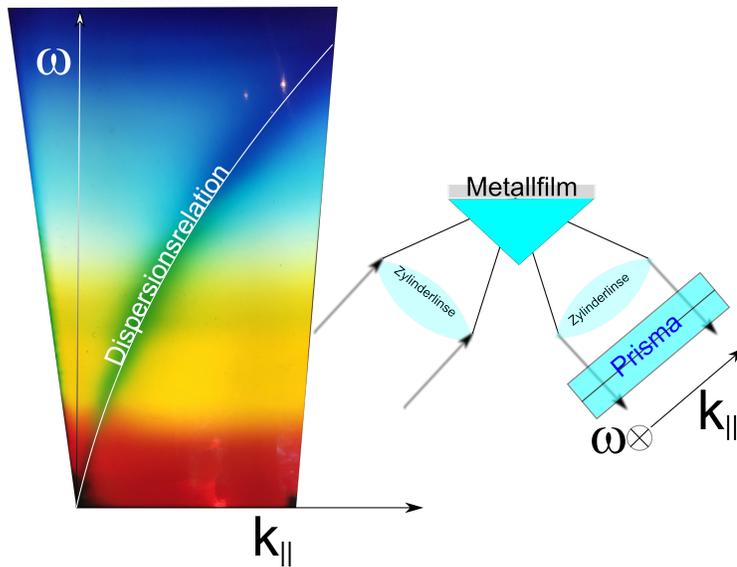
Wir lösen nach dem Grenzflächenwellenvektor  $k_{||}$  auf und erhalten die Dispersionsrelation für Oberflächenplasmonen:

$$k_{||}(\omega) = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{\epsilon_r(\omega)^M}{1 + \epsilon_r(\omega)^M}} \quad (19.50)$$

Die Ladungsdichte  $\rho = \sigma \delta(z)$  bzw. die Oberflächenladungsdichte  $\sigma$  erhalten wir über

$$\rho(x) = \nabla \cdot \mathbf{E} = \left( \hat{E}_z(z=+0) - \hat{E}_z(z=-0) \right) \delta(z) e^{i(k_{||}x - \omega t)} \quad (19.51)$$

$$\sigma(x) = \frac{\hat{B}c^2}{\omega} \frac{\epsilon_r(\omega)^M - 1}{\epsilon_r(\omega)^M} e^{i(k_{||}x - \omega t)} \quad (19.52)$$



**Abbildung 19.5:** Foto der Dispersionsrelation von Oberflächenplasmonen durch Messung der Absorption an einem Metallfilm

In Abbildung 19.5 haben wir ein Foto der Dispersionsrelation von Oberflächenplasmonen aufgetragen. In Abbildung 19.6 zeigen wir die Oberflächenladungsdichte und das elektrische Feld der Grenzflächenwelle.

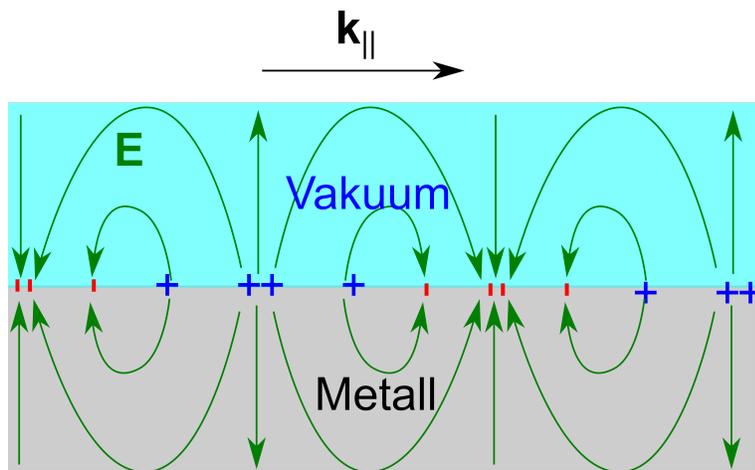


Abbildung 19.6: Elektrisches Feld und Ladungsdichte eines Oberflächenplasmons



## Kapitel 20

# Reflexion und Hohlraumleiter

In dieser Vorlesung berechnen wir den Reflexionskoeffizienten eines Metalls. Wir berechnen das elektromagnetische Feld eines Hohlraumleiters, das entweder im elektrischen Feld oder in der magnetischen Induktion Longitudinalkomponenten hat. Wir unterscheiden transversal magnetische von transversal elektrischen Moden. Die Dispersionsrelation von Hohlraumleitern ist nicht frei von Dispersion und besitzt eine untere Abschnidefrequenz.

## 20.1 Lineare Antwort von Elektronen auf elektrische Felder

Wir haben in Vorlesung 19 allerhand Phänomene in und an Metallen diskutiert, und wollen hier diese zur Übersicht nochmals zusammenstellen: In einem Metall gibt es drei charakteristische Frequenzbereiche, indem es sich grundlegend jeweils anders verhält.

- den dissipativen niederfrequenten Bereich  $\omega < \tau^{-1}$

Hier gilt das Ohmsche Gesetz mit nahezu frequenzunabhängiger Gleichstromleitfähigkeit. Die Elektronen des Metalls relaxieren über Stoßprozesse schneller in einen stationären Zustand als sich das treibende elektrische Feld verändert. Die Stromdichte ist mit dem elektrischen Feld in Phase und die Leistungsdichte  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  wird als Wärme im Metall dissipiert. Elektrische Wellen und damit verbundene Ströme dringen mit einer Eindringtiefe  $\Im k^{-1} \propto \omega^{-1/2}$  in das Metall ein, die mit dem normalen Skineneffekt (Eindringtiefe  $\approx$  Wellenlänge) als Funktion der Frequenz immer kleiner wird. Die Dielektrizitätskonstante ist im wesentlichen imaginär  $\epsilon_r \propto i/\omega$  mit einem Absorptionspeak (ein Pol) bei verschwindender Frequenz.

- der intransparente mittelfrequente Bereich  $\tau^{-1} < \omega < \omega_p$

Hier dominiert der negative Realteil  $\epsilon'_r < -|\epsilon''_r|$  das Verhalten der Elektronen. Bevor die Elektronen mit einem Stoßpartner kollidieren, werden sie vom elektrischen Feld, das sich durch eine Auslenkung aus der neutralen Ruhelage gebildet hat, in ihre Ruhelage zurückgeholt. Die Schwingungen der Elektronen bauen eine Polarisation auf, die phasengleich zum elektrischen Feld ist und dieses am Eindringen in das Metall hindert. Die kleine Eindringtiefe ist unabhängig von der Wellenlänge (anormaler Skineneffekt). Elektromagnetische Wellen werden am Metall reflektiert

- der transparente hochfrequente Bereich  $\omega > \omega_p$

Stoßprozesse sind hier irrelevant. Die treibende Frequenz des elektrischen Feldes ist oberhalb der Plasmafrequenz (Resonanzfrequenz), die sich aufbauende Polarisation ist deshalb klein weil die Elektronen nicht mehr mit dem Feld mitkommen und gegenphasig zum elektrischen Feld. Die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle erfolgt ungedämpft mit einer Phasengeschwindigkeit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit.

Gegenüber dem Vakuum gibt es neben den 2 transversalen elektromagnetischen Wellen auch eine longitudinale elektromagnetische Welle bei der Plasmafrequenz, die als Volumenplasmonen bezeichnet werden). Das Eindringen einer elektromagnetischen Welle in ein Metall hängt von der Ausbreitungsrichtung der Welle relativ zur Vakuum/Metallgrenzfläche ab.

Es gibt ebene elektromagnetische Wellen ohne exponentiellen Abfall für Frequenzen oberhalb der Plasmafrequenz. Halbseitig evaneszente Wellen die nur im Metall exponentiell abklingen und Oberflächenkonzentrierte evaneszente elektromagnetische Wellen (den Oberflächenplasmonen), die mit longitudinalen Schwingungen der Oberflächenladungen einhergehen. Die Frequenz der Oberflächenplasmonen liegt unterhalb der Plasmafrequenz.

## 20.2 Reflexionskoeffizient eines Metalls

Wir betrachten die Reflexion von elektromagnetischen Wellen an einem Metall bei senkrechtem Einfall der Welle auf die bei  $x = 0$  liegende Vakuum/Metall-Grenzfläche (Abbildung 20.1).

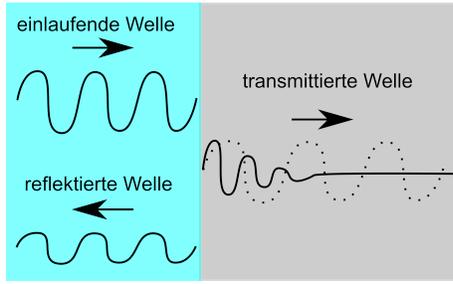


Abbildung 20.1: Einlaufende, reflektierte und transmittierte Welle

Die elektromagnetische Welle im Vakuum ( $x < 0$ ) schreiben wir als Superposition einer einlaufenden und einer reflektierten Welle, während wir im Metall nur eine nach rechts laufende transmittierte Welle ansetzen:

$$\mathbf{E}_{Vakuum} = \hat{E}_i \mathbf{e}_y e^{i(k_V x - \omega t)} + \hat{E}_r \mathbf{e}_y e^{i(-k_V x - \omega t)} \quad (20.1)$$

$$\mathbf{B}_{Vakuum} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_i + \frac{1}{\omega} \mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_r = \hat{E}_i \frac{k_V}{\omega} \mathbf{e}_z e^{i(k_V x - \omega t)} - \hat{E}_r \frac{k_V}{\omega} \mathbf{e}_z e^{i(-k_V x - \omega t)} \quad (20.2)$$

$$\mathbf{E}_{Metall} = \hat{E}_t \mathbf{e}_y e^{i(k_M x - \omega t)} \quad (20.3)$$

$$\mathbf{B}_{Metall} = \hat{E}_t \frac{k_M}{\omega} \mathbf{e}_z e^{i(k_M x - \omega t)} \quad (20.4)$$

mit den Wellenvektoren

$$k_{M,V} = \omega \sqrt{\epsilon_r(\omega)^{M,V}} / c \quad (20.5)$$

An der Grenzfläche muss  $\mathbf{B}$  stetig sein und wir finden die Beziehung

$$\hat{E}_i \frac{k_V}{\omega} - \hat{E}_r \frac{k_V}{\omega} = \hat{E}_t \frac{k_M}{\omega} \quad (20.6)$$

An der Grenzfläche muss  $\mathbf{e}_x \times \mathbf{E}$  stetig sein und wir finden die Beziehung

$$\hat{E}_i + \hat{E}_r = \hat{E}_t \quad (20.7)$$

zwischen den Amplituden der einzelnen Wellen. Wir kombinieren Gleichung 20.6 und Gleichung 20.7 zu

$$\begin{pmatrix} k_V & k_M \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{E}_r \\ \hat{E}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_V \\ 1 \end{pmatrix} \hat{E}_i \quad (20.8)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{E}_r \\ \hat{E}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_V & k_M \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} k_V \\ 1 \end{pmatrix} \hat{E}_i \quad (20.9)$$

$$= \frac{1}{k_V + k_M} \begin{pmatrix} 1 & -k_M \\ 1 & k_V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_V \\ 1 \end{pmatrix} \hat{E}_i \quad (20.10)$$

$$= \frac{1}{k_V + k_M} \begin{pmatrix} k_V - k_M \\ 2k_V \end{pmatrix} \hat{E}_i \quad (20.11)$$

Das Verhältnis der reflektierten zur einfallenden Amplitude der Welle ist also

$$\hat{E}_r = \frac{k_V - k_M}{k_V + k_M} \hat{E}_i = \frac{1 - k_M/k_V}{1 + k_M/k_V} \hat{E}_i \stackrel{20.5}{=} \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r^M(\omega)}}{1 + \sqrt{\epsilon_r^M(\omega)}} \hat{E}_i \quad (20.12)$$

Wir definieren die Reflexionsamplitude

$$R = \frac{\hat{E}_r}{\hat{E}_i} = \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r^M(\omega)}}{1 + \sqrt{\epsilon_r^M(\omega)}} \quad (20.13)$$

Die Energiedichten der einlaufenden und reflektierten Wellen betragen  $u_i = \epsilon_0/2 \hat{E}_i^2$  und  $u_r = \epsilon_0/2 \hat{E}_r^2$  weshalb der Reflexionskoeffizient

$$r = |R|^2 \quad (20.14)$$

ist.

Wir betrachten die Reflexionsamplitude im dissipative Bereich

- dissipativer Bereich  $\omega < \tau^{-1}$  hier gilt

$$\epsilon_r^M(\omega) = i \frac{\omega_p^2}{\omega \tau^{-1}} \quad (20.15)$$

und wir finden

$$R = \frac{1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\omega_p}{\sqrt{\omega \tau^{-1}}}}{1 + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\omega_p}{\sqrt{\omega \tau^{-1}}}} = \begin{array}{l} \omega \rightarrow 0 \quad = -1 \\ \nearrow \\ \omega \text{ endlich} \quad |R| < 1 \\ \searrow \\ \omega \rightarrow \infty \quad = 1 \end{array} \quad (20.16)$$

- nicht dissipativer Bereich  $\omega > \tau^{-1}$  hier gilt

$$\epsilon_r^M(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (20.17)$$

und wir finden

$$R = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = \begin{array}{l} \omega < \omega_p \quad = e^{i\delta} \\ \nearrow \\ \omega \rightarrow \infty \quad = 0 \\ \searrow \end{array} \quad (20.18)$$

In Abbildung 20.2 tragen wir den Reflexionskoeffizienten  $r(\omega)$  gegen die Frequenz auf. Für den dissipative Bereich  $\omega < \tau^{-1}$  wird die Energie der Welle vom Metall absorbiert und durch Stöße der Elektronen als Wärme dissipiert. Das Metall erscheint in diesem Frequenzbereich *schwarz*. Für den Bereich  $\tau^{-1} < \omega < \omega_p$  kompensiert die induzierte Polarisation das einfallende externe elektromagnetische Feld. Die elektromagnetische Welle wird reflektiert. In diesem Frequenzbereich (der in der Regel den sichtbaren Frequenzbereich voll überdeckt) erscheint das Metall in seinem typischen reflektierenden metallischen Glanz. Für den Bereich  $\omega > \omega_p$  können Elektronen nicht mehr mit dem externen einfallenden Feld mitschwingen und lassen die elektromagnetische Welle passieren. Das Metall ist in diesem Frequenzbereich transparent.

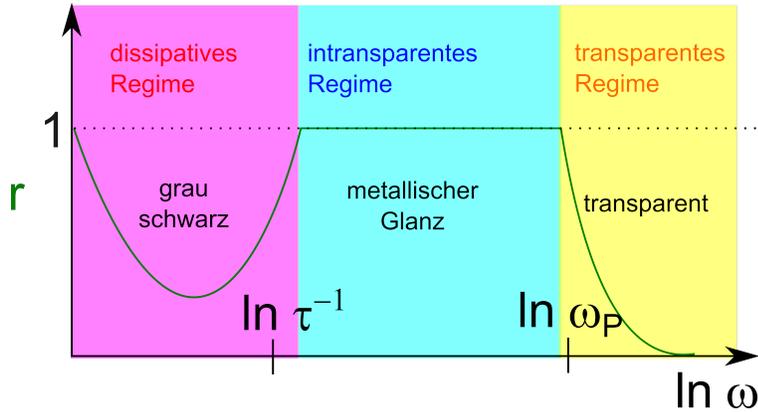


Abbildung 20.2: Verlauf des Reflexionskoeffizienten in einem Metall

## 20.3 Hohlraumleiter

Bei Frequenzen im Gigahertzbereich  $\omega > \tau^{-1}$  schrumpft die Eindringtiefe elektromagnetischer Wellen in einem Metall auf wenige Mikrometer, so dass wir Drähte als stromführende Elemente nicht sinnvoll benutzen können. Bei diesen Frequenzen kommen Hohlraumleiter als Wellenleiter zum Einsatz, metallische Hohlräume, die in ihrem Inneren leer sind. Im Inneren gilt deshalb die Vakuum-Wellengleichung

$$\left[ \frac{\omega^2}{c^2} + \nabla^2 \right] \mathbf{Z} = 0 \quad (20.19)$$

für den Hertzschen Vektor mit der magnetischen Flußdichte

$$\mathbf{B} = \frac{i\omega}{c^2} \nabla \times \mathbf{Z}, \quad (20.20)$$

und dem elektrischen Feld

$$\mathbf{E} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{Z}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{Z} \quad (20.21)$$

Wir betrachten einen rechteckigen Hohlraumleiter, wie in Abbildung 20.3 dargestellt, der elektromagnetische Wellen in die  $z$ -Richtung leiten soll. In Folge des anormalen Skineffektes dringt weder das elektrische Feld  $\mathbf{E}$ , noch die magnetische Flußdichte  $\mathbf{B}$  signifikant in das Metall ein, weshalb die Randbedingungen, dass die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes direkt am Metall verschwindet  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$  und die Normalkomponente der Flußdichte verschwindet  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$  eine ausgezeichnete Approximation ist.

Wir starten mit dem Ansatz

$$\mathbf{Z} = \psi_{TM} \mathbf{e}_z + \nabla \times \psi_{TE} \mathbf{e}_z \quad (20.22)$$

mit

$$\psi_{TM} = \hat{\psi}_{TM} e^{i(\omega t - k_z z)} \sin k_x x \sin k_y y \quad (20.23)$$

bzw.

$$\psi_{TE} = \hat{\psi}_{TE} e^{i(\omega t - k_z z)} \cos k_x x \cos k_y y \quad (20.24)$$

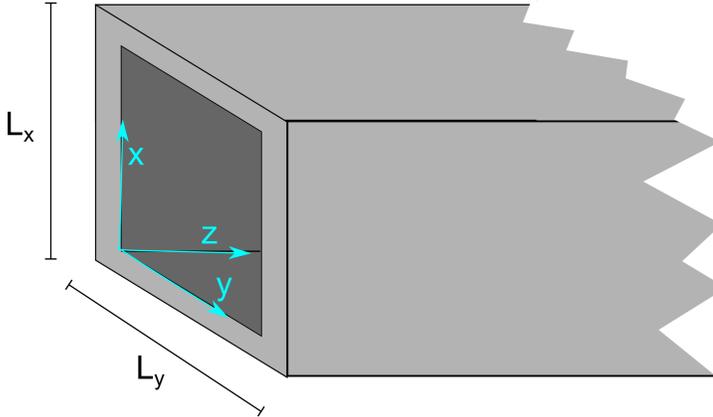


Abbildung 20.3: Ein Hohlraumleiter

und nehmen jeweils an, dass nur eine Amplitude  $\hat{\psi}_{TM}$  bzw.  $\hat{\psi}_{TE}$  der skalaren  $\psi$ -Felder ungleich Null ist.

Wir beginnen mit dem transversal magnetischen (TM)-Ansatz und berechnen die magnetische Flussdichte

$$\mathbf{B}_{TM} = \frac{i\omega}{c^2} (\nabla \times \psi_{TM} \mathbf{e}_z) = \frac{i\omega}{c^2} \begin{pmatrix} \partial_y \psi_{TM} \\ -\partial_x \psi_{TM} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20.25)$$

$$= \frac{i\omega \hat{\psi}_{TM}}{c^2} e^{i(\omega t - k_z z)} \begin{pmatrix} k_y \sin k_x x \cos k_y y \\ -k_x \cos k_x x \sin k_y y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20.26)$$

und verstehen jetzt den Namen transversal magnetisch, denn die Komponente der Flussdichte in Propagationsrichtung der Welle  $B_z = 0$  verschwindet. Wir berechnen das elektrische Feld

$$\mathbf{E}_{TM} = -\nabla(\partial_z \psi_{TM}) - \frac{\omega^2}{c^2} \psi_{TM} \mathbf{e}_z = ik_z \begin{pmatrix} \partial_x \psi_{TM} \\ \partial_y \psi_{TM} \\ \partial_z \psi_{TM} \end{pmatrix} - \frac{\omega^2}{c^2} \psi_{TM} \mathbf{e}_z \quad (20.27)$$

$$= \hat{\psi}_{TM} e^{i(\omega t - k_z z)} \begin{pmatrix} ik_z k_x \cos k_x x \sin k_y y \\ ik_z k_y \sin k_x x \cos k_y y \\ (k_z^2 - \omega^2/c^2) \sin k_x x \sin k_y y \end{pmatrix} \quad (20.28)$$

und erkennen, dass das elektrische Feld eine nicht verschwindende Longitudinalkomponente  $E_z \neq 0$  besitzt. Wir bezeichnen die Ausdehnung des Hohlraums in die  $x$ - und  $y$ -Richtung mit  $L_x$  und  $L_y$  und wählen

$$k_x = \frac{n_x \pi}{L_x} \quad n_x \in \mathbb{Z} \quad (20.29)$$

$$k_y = \frac{n_y \pi}{L_y} \quad n_y \in \mathbb{Z}, \quad (20.30)$$

so dass gilt

$$\begin{aligned} B_x &= 0 & \text{für } x = 0 & \text{ und } x = L_x \\ B_y &= 0 & \text{für } y = 0 & \text{ und } y = L_y \\ E_y &= 0 & \text{für } x = 0 & \text{ und } x = L_x \\ E_x &= 0 & \text{für } y = 0 & \text{ und } y = L_y \end{aligned} \quad (20.31)$$

$$E_z = 0 \text{ für } x = 0, y = 0, x = L_x, y = L_y \quad (20.32)$$

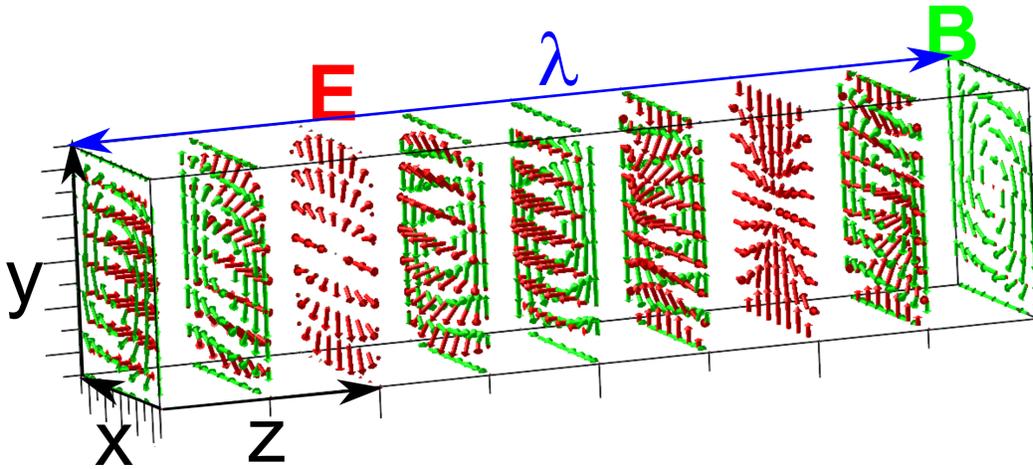


Abbildung 20.4: Elektromagnetisches Feld einer TM-Hohlraumleitermode

und somit alle Randbedingungen erfüllt sind. In Abbildung 20.4 zeichnen wir die magnetische Flussdichte und das elektrische Feld der Grundmode  $n_x, n_y = 1, 1$  eines Hohlraumleiters.

Wir wiederholen die Berechnungen der Felder für die transversal elektrischen Moden und finden

$$\mathbf{B}_{TE} = \frac{i\omega}{c^2}(\nabla \times \mathbf{Z}) = \frac{i\omega}{c^2}(\nabla \times (\nabla \times \psi_{TE} \mathbf{e}_z)) = \quad (20.33)$$

$$= \frac{i\omega}{c^2}(\nabla \nabla - \nabla^2 \mathbf{1}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_{TE} \end{pmatrix} \quad (20.34)$$

$$= \frac{i\omega}{c^2} \hat{\psi}_{TE} e^{i(\omega t - k_z z)} \begin{pmatrix} ik_z k_x \sin k_x x \cos k_y y \\ -ik_z k_y \cos k_x x \sin k_y y \\ (k_x^2 + k_y^2) \cos k_x x \cos k_y y \end{pmatrix} \quad (20.35)$$

und erkennen, dass das die magnetische Flussdichte eine nicht verschwindende Longitudinalkomponente  $B_z \neq 0$  besitzt. Wir berechnen das elektrische Feld

$$\mathbf{E}_{TE} = \nabla(\nabla \cdot (\nabla \times \dots)) - \frac{\omega^2}{c^2} \nabla \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_{TE} \end{pmatrix} \quad (20.36)$$

$$= -\frac{\omega^2}{c^2} \begin{pmatrix} -\partial_y \psi_{TE} \\ \partial_x \psi_{TE} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20.37)$$

$$= -\frac{\omega^2}{c^2} \hat{\psi}_{TE} e^{i(\omega t - k_z z)} \begin{pmatrix} k_y \cos k_x x \sin k_y y \\ -k_x \sin k_x x \cos k_y y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20.38)$$

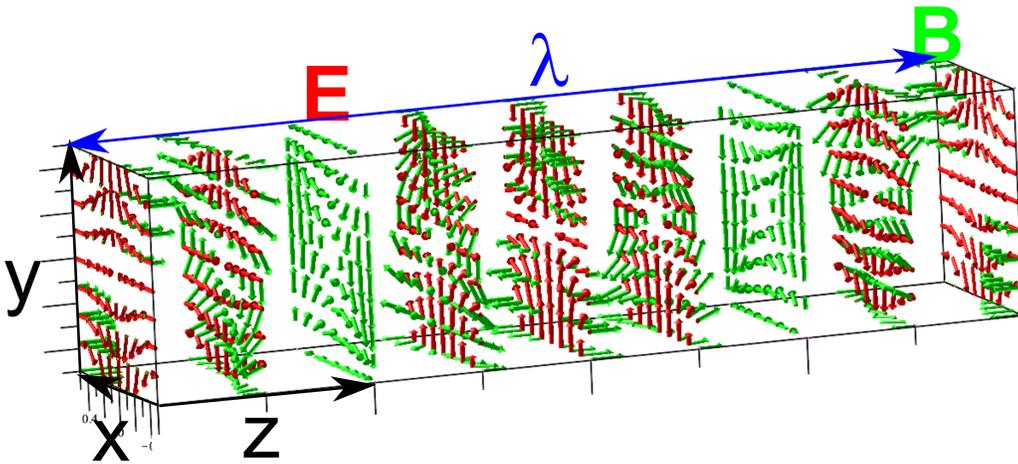


Abbildung 20.5: Elektromagnetisches Feld einer TE-Hohlraumleitermode

und sehen, dass der Name transversal elektrische Mode gerechtfertigt ist. In Abbildung 20.5 haben wir die magnetische Flussdichte und das elektrische Feld im Hohlraumleiter aufgetragen. Die Dispersionsrelation der Hohlraumwelle ist

$$\omega = \sqrt{k_z^2 + k_\perp^2} c \quad (20.39)$$

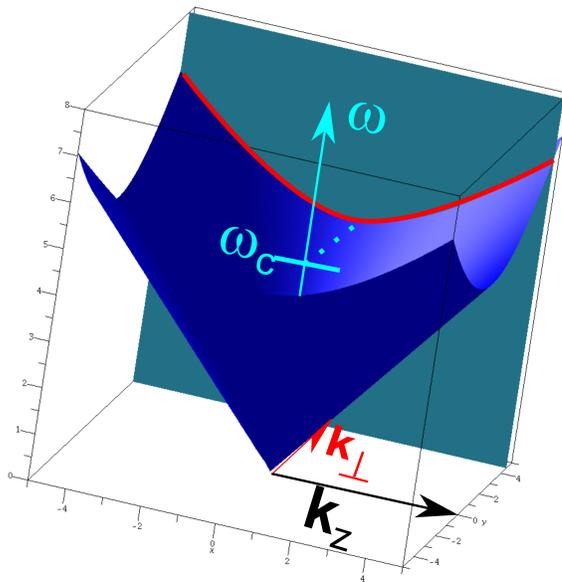
mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_z^{ph} = \frac{\omega}{k_z} = \sqrt{1 + \frac{k_\perp^2}{k_z^2}} c > c \quad (20.40)$$

und der Gruppengeschwindigkeit

$$v_z^{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{k_z}{\sqrt{k_z^2 + k_\perp^2}} c < c \quad (20.41)$$

Wir können uns die Welle als ständig zwischen den Wänden des Hohlleiters hin und her reflektierte Superposition schräglauferender Wellen vorstellen. Wellenleiter haben eine untere Cut-off-Frequenz



**Abbildung 20.6:** Bei festem  $k_{\perp}$  hat die Dispersionsrelation eine Cutoff-frequenz und ist nicht frei von Dispersion

$\omega_c = k_{\perp}c$  mit  $\mathbf{k}_{\perp} = n_x\pi/L_x\mathbf{e}_x + n_y\pi/L_y\mathbf{e}_y$  unterhalb der keine Welle transmittiert werden kann (Abbildung 20.6). In Folge der Dispersion  $v_z^{gr} = v_z^{gr}(k_z)$  zerläuft das Signal in Wellenleiter dieser Art. Die Cut-off-Frequenz ist eine Folge des nicht vollständig transversalen Charakters der Welle. In der nächsten Vorlesung 21 werden wir Wellenleiter kennen lernen die dispersionsfrei sind.

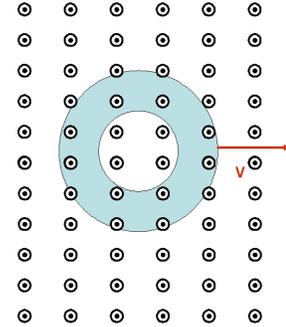
## 20.4 Übungen

### 20.4.1 Metallring

Erklären Sie den Verlauf der Dielektrizitätskonstante eines Metalles als Funktion der Frequenz und erklären Sie die Charakteristika der drei verschiedenen Frequenzbereiche.

Ein Metallring des Radius  $R = 10 \text{ nm}$  wird mit konstanter Geschwindigkeit durch ein homogenes Magnetfeld welches für  $x > 0$  abrupt auf 0 abfällt gezogen (Abbildung 20.7). (Der Radius des Ringes ist so klein, dass alle Geschwindigkeiten nichtrelativistisch sind)

- Skizzieren Sie die Ladungsdichte und das elektrische Feld im Metallring während des Durchflugs durchs homogene Magnetfeld
- Erklären Sie qualitativ den Verlauf des elektrischen Feldes und des Magnetfeldes beim langsamen, schnellen und sehr schnellen Herausziehen des Ringes aus dem Magnetfeld für die drei Fälle, dass der Wert des Verhältnisses der Geschwindigkeit des Ringes zu seinem Radius ( $v/R$ ) in jeweils einen typischen Frequenzbereich des Metalls fällt.



**Abbildung 20.7:** Ein Metallring beim Verlassen des Magnetfeldes.

### 20.4.2 Experiment: Silizium und Metall

Besorgen Sie sich zwei Stück eines Silizium wavers (liegt bei fast jedem Lehrstuhl irgendwo rum). Machen Sie daraus ein Sandwich Silizium/Wasser/Silizium und heizen Sie es in einer Mikrowelle. Vergleichen Sie die erreichte Temperatur mit einem Alu/Wasser/Alu Sandwich. Können Sie den Unterschied erklären?

### 20.4.3 Programmierung: Zylindrischer Hohlraumleiter

Wiederholen Sie die Ableitung des elektrischen und magnetischen Feldes für einen zylindrischen Hohlraum des Radius  $R$ . Wechseln Sie hierzu zu Zylinderkoordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  und nehmen Sie den Ansatz 20.22. des Vorlesungsskripts mit einer Funktion  $\psi_{TM}$  von der Form

$$\psi_{TM} = \hat{\psi}_{TM} e^{i(\omega t - k_z z)} f_{TM}(k_{\perp} \rho)$$

Welche Differentialgleichung ergibt sich für die Funktion  $f_{TM}(k_{\perp} \rho)$ ? Geben Sie die Differentialgleichung in ein Mathematikprogramm ein und lassen Sie diese analytisch lösen. Berechnen Sie das elektrische Feld und die magnetische Flussdichte. Welche Werte von  $k_{\perp} R$  sind erlaubt? Plotten Sie das Vektorfeld des elektrischen Feldes und der magnetischen Flussdichte.





## Kapitel 21

# Koaxialkabel und Maxwellscher Spannungstensor

In dieser Vorlesung lösen wir die Wellengleichung in einem Koaxialkabel. Das Koaxialkabel ist dispersionsfrei und hat keine Cut-off-frequenz. Die Welle breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus und die Impedanz des Kabels ist reell aber nicht dissipativ. In einem Ladungsfreien und Kräfte freiem Raum wird die Kraft durch den Maxwellschen Spannungstensor zwischen den Ladungen übermittelt.

## 21.1 Das Koaxialkabel als Cut-off freier und dispersionsfreier Wellenleiter

Wir hatten in der letzten Vorlesung 20 Hohlraumwellenleiter besprochen die nicht dispersionsfrei  $d\mathbf{v}^{gr}/d\omega \neq 0$  waren und eine Propagation von Wellen nur oberhalb einer Cutoff-frequenz erlaubten. Wir erinnern an die Wellengleichung für den Hertzschen Vektor

$$\left[ \frac{\omega^2}{c^2} + \nabla^2 \right] \mathbf{Z} = 0 \quad (21.1)$$

$$\left[ \left( \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \nabla_{\perp}^2 \right] \mathbf{Z} = 0 \quad (21.2)$$

die wir hier in ihren longitudinalen und transversalen Anteil ( $\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y$ ) aufgeteilt haben. Wenn wir fordern, dass beide Anteile separat verschwinden:

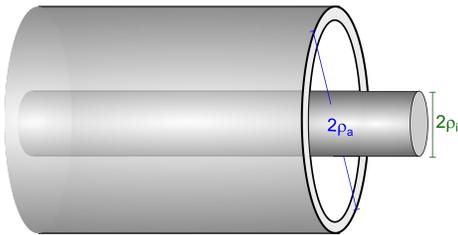
$$\left( \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{Z} = 0 \quad (21.3)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \mathbf{Z} = 0, \quad (21.4)$$

dann folgt aus Gleichung 21.3 die dispersionsfreie Dispersionsrelation

$$\omega = k_z c, \quad (21.5)$$

die weder eine Cutoff-frequenz besitzt, noch das Auseinanderlaufen des Signals bewirkt. Wir müssen also fordern, dass der Hertzsche Vektor sowohl der longitudinalen Wellengleichung 21.3, als auch der transversalen Laplacegleichung 21.4 mit der Randbedingung einer konstanten Polarisation entlang des Umfangs des Wellenleiters genügt. Ein mathematisches Theorem besagt, dass eine Funktion welche in einem Gebiet die zweidimensionale Laplacegleichung erfüllt ihr Maximum und Minimum auf dem Rand dieses Gebiets annehmen muss und nicht im Inneren des Gebietes, es sei denn die Funktion ist eine Konstante. Ein konstantes  $\mathbf{Z}$  beschreibt ein von elektromagnetischem Feld freies Gebiet und wir brauchen deshalb zwei geschlossene Ränder des Gebiets auf dem die Polarisation zwei unterschiedliche Werte hat, so dass die Komponenten des Hertzschen Vektors auf dem einen Rand das Maximum und auf dem anderen Rand das Minimum einnehmen.



**Abbildung 21.1:** Ein Koaxialkabel mit Innenleiter und Außenmantel und nicht einfach wegzusammenhängenden Zwischenraum

Ein Gebiet mit zwei Rändern ist nicht einfach zusammenhängend. Dispersionsfreie Wellenleiter gibt es also nur für nicht einfach zusammenhängende Hohlraumwellenleiter. Die einfachste nichteinfach

zusammenhängende Geometrie eines solchen Hohlraumleiters ist die eines Koaxialkabels, in dem es einen inneren und äußeren Metallzylinder gibt zwischen die der Hohlraum platziert ist (Abbildung 21.1) .

Wir schreiben den Hertzschen Vektor als Produkt der Lösung der longitudinalen Wellengleichung 21.3 mit der Lösung der transversalen Laplacegleichung 21.4

$$\mathbf{Z} = Z_{||}(z, t)\mathbf{Z}_{\perp}(x, y) = e^{i(\omega t - k_z z)}\mathbf{Z}_{\perp}(x, y) \quad (21.6)$$

und machen für die transversale Lösung wieder den Ansatz

$$\mathbf{Z}_{\perp}(x, y) = \psi_{TEM}(x, y)\mathbf{e}_z, \quad (21.7)$$

und verbleiben so mit der skalaren Laplacegleichung

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_{TEM}(x, y) = 0 \quad (21.8)$$

die von jeder Funktion der Form

$$\psi = \Re(f(x + iy)) \quad (21.9)$$

gelöst wird. Wir wählen die zylindersymmetrische Funktion

$$\psi_{TEM}(x, y) = \hat{\psi}\Re(\ln(x + iy)) = \hat{\psi}\Re(\ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \arctan \frac{x}{y}) = \hat{\psi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (21.10)$$

Beachten Sie, dass  $\psi_{TEM}$  für  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$  nicht analytisch ist und wir deshalb keinesfalls den Innenleiter weglassen können (mit Innenleiter muss  $\psi_{TEM}$  die Laplacegleichung bei  $\rho = 0$  nicht erfüllen). Wir berechnen

$$\partial_x \psi_{TEM}(x, y)/\hat{\psi} = \partial_x \ln \sqrt{x^2 + y^2} \stackrel{(x,y) \neq (0,0)}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \partial_x \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (21.11)$$

$$\partial_x^2 \psi_{TEM}(x, y)/\hat{\psi} = \partial_x \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (21.12)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \psi_{TEM}(x, y)/\hat{\psi} = (\partial_x^2 + \partial_y^2) \psi_{TEM}(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad (21.13)$$

und finden, dass die Laplacegleichung tatsächlich erfüllt ist. Wir haben damit die Lösung

$$\mathbf{Z} = \hat{\psi} \ln \frac{\rho}{\rho_0} e^{i(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_z \quad (21.14)$$

gefunden, und berechnen damit die Flussdichte:

$$\mathbf{B} = \frac{i\omega}{c^2} \nabla \times \mathbf{Z} = \frac{i\omega}{c^2} \hat{\psi} e^{i(\omega t - k_z z)} \begin{pmatrix} \partial_y \ln \frac{\rho}{\rho_0} \\ -\partial_x \ln \frac{\rho}{\rho_0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21.15)$$

$$= \frac{i\omega}{c^2} \hat{\psi} e^{i(\omega t - k_z z)} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21.16)$$

$$= \frac{i\omega}{\rho c^2} \hat{\psi} e^{i(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_{\phi}, \quad (21.17)$$

die azimuthal entlang das Azimuthvektors  $\mathbf{e}_\phi$  also transversal zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{e}_z$  gerichtet ist.

Wir berechnen das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{Z}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{Z} \quad (21.18)$$

$$= -\nabla(\partial_z \psi_{TEM}) - \frac{\omega^2}{c^2} \psi_{TEM} \mathbf{e}_z \quad (21.19)$$

$$= -\nabla(-ik_z \psi_{TEM}) - \frac{\omega^2}{c^2} \psi_{TEM} \mathbf{e}_z \quad (21.20)$$

$$= \underbrace{(k_z^2 - \omega^2/c^2)}_{=0} \psi_{TEM} \mathbf{e}_z - ik_z \nabla_\perp \psi_{TEM} \quad (21.21)$$

$$= -ik_z \hat{\psi} e^{i(\omega t - k_z z)} \frac{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}{x^2 + y^2} \quad (21.22)$$

$$= -\frac{ik_z \hat{\psi}}{\rho} e^{i(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_\rho, \quad (21.23)$$

das entlang dem zylindrischen Radialvektor  $\mathbf{e}_\rho$  also transversal zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{e}_z$  gerichtet ist. Es sind also die elektromagnetischen Felder beide transversal, was der Welle den Namen transversal elektromagnetische (TEM)-Welle einbringt. Die volle Wellengleichung für den Hertzischen Vektor inklusive der metallischen Region lautet

$$\left[ \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) + \nabla_\perp^2 \right] \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (21.24)$$

woraus wir über den Satz von Gauss finden

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\delta(\rho - \rho_i) \mathbf{n}_i + \delta(\rho - \rho_a) \mathbf{n}_a) \cdot \mathbf{e}_\rho \partial_\rho \mathbf{Z} \quad (21.25)$$

$$= \epsilon_0 (\delta(\rho - \rho_i) - \delta(\rho - \rho_a)) \hat{\psi} \frac{1}{\rho} e^{i(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_z \quad (21.26)$$

mit den beiden Normalenvektoren  $\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_\rho$  und  $\mathbf{n}_a = -\mathbf{e}_\rho$  auf die Metallränder und daraus die Ladungsdichte und Stromdichte

$$\begin{pmatrix} \rho_{el} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} k_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P} \\ \omega \mathbf{P} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} k_z \\ \omega \mathbf{e}_z \end{pmatrix} (\delta(\rho - \rho_i) - \delta(\rho - \rho_a)) \epsilon_0 \hat{\psi} \frac{1}{\rho} e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (21.27)$$

Wir führen als Amplitude der Welle die Stromamplitude des am äußerend Rand fließenden Stromes

$$\hat{I} = 2\pi i \omega \epsilon_0 \hat{\psi} \quad (21.28)$$

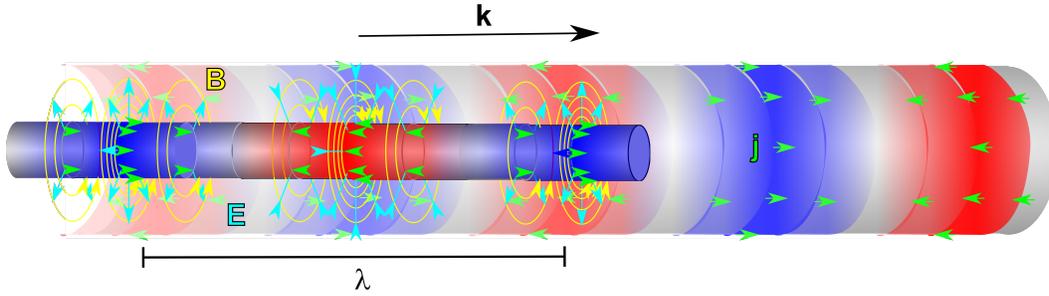
ein und stellen unsere Lösung damit nochmals zusammen

$$\mathbf{Z} = -\frac{\hat{I}}{-2\pi i \epsilon_0 \omega} \ln(\rho/\rho_0) e^{i(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_z \quad (21.29)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\hat{I}}{2\pi \rho \epsilon_0 c^2} e^{i(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_\phi \quad (21.30)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\hat{I} \text{sign}(k_z)}{2\pi \rho \epsilon_0 c} e^{i(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_\rho \quad (21.31)$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{el} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \hat{I} \begin{pmatrix} \text{sign}(k_z)/c \\ e_z \end{pmatrix} \frac{\delta(\rho - \rho_a) - \delta(\rho - \rho_i)}{2\pi \rho} e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (21.32)$$



**Abbildung 21.2:** Elektromagnetische Felder, Ladungsdichte und Stromdichte in einem Koaxialkabel

In Abbildung 21.2 haben wir die elektromagnetischen Felder und Ströme in einem Koaxialkabel skizziert.

Das elektrostatische Potenzial beträgt

$$\phi = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{Z} = \frac{\hat{I} \text{sign}(k_z)}{2\pi \epsilon_0 c} \ln(\rho/\rho_0) e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad (21.33)$$

und die zwischen Außen und Innen anliegende Spannung beträgt:

$$U = \phi(\rho_a) - \phi(\rho_i) = \frac{I \text{sign}(k_z)}{2\pi \epsilon_0 c} \ln(\rho_a/\rho_i) e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (21.34)$$

Das Verhältnis von Spannung zwischen Außen und Innen  $U$  und Außenstrom  $I = \hat{I} e^{i(\omega t - k_z z)}$  definiert die Impedanz  $Z_{Imp}$  des Koaxialkabels

$$Z_{Imp} = \frac{\text{sign}(k_z)}{2\pi \epsilon_0 c} \ln \frac{\rho_a}{\rho_i}. \quad (21.35)$$

Die Impedanz des Koaxialkabels ist, wie bei einem Ohmschen Widerstand, reell, aber die Stromdichte ist senkrecht zum elektrischen Feld gerichtet so dass keine Leistungsverluste  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0$  auftreten. Die Impedanz des Koaxialkabels ist ein Scheinwiderstand.

In der laufenden Welle sind Strom und Spannung in Phase und auch das elektrische Feld ist in Phase mit der magnetischen Flussdichte.

Transversal elektromagnetische Wellen übertragen das Signal dispersionsfrei. In einer Ebene senkrecht zur Koaxialleitung entsprechen die Felder denselben Feldern eines statisch geladenen und stromdurchflossenen Leiters. Sie sind jedoch in  $z$ -Richtung mit einer ebenen Welle  $e^{i(\omega t - k_z z)}$  moduliert.

Superponieren wir zwei gegenläufige Wellen entstehen Strombäuche die an den Stellen der Magnetfeldbäuche sind und Ladungsbäuche, die an den Stellen der elektrischen Feldbäuche sind. Strom und Ladungsbäuche sind gegeneinander um eine Viertel Wellenlänge verschoben.

Im E-learning sehen Sie die Messung einer stehenden Welle in einer Lecherleitung, einer zweiten Möglichkeit ein nichtzusammenhängendes Feldgebiet zwischen zwei Drähten zu erzeugen, das die Übertragung von transversal elektromagnetischen Wellen erlaubt.

## 21.2 Kraftübertragung und der Spannungstensor

In der Punktteilchenbeschreibung der Elektrostatik ist die elektrostatische Kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad (21.36)$$

durch das Produkt aus Ladung und elektrischem Feld beschrieben. Wir gingen über zur Kontinuumsbeschreibung und führten die Kraftdichte

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} \quad (21.37)$$

ein wobei die Ladungsdichte durch die inhomogene Maxwellgleichung

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (21.38)$$

gegeben ist. Wir zielen darauf ab die Kraftdichte als Divergenz einer mechanischen Spannung

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \dots = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (21.39)$$

zu schreiben, weil wir dann das Volumenintegral über die Kraftdichte als eine Oberflächenintegral umschreiben können. Die Umformung gelingt uns über

$$\mathbf{f} = \epsilon_0 \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \epsilon_0 \mathbf{E} \times \underbrace{(\nabla \times \mathbf{E})}_{=0} \quad (21.40)$$

$$= \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \nabla \mathbf{E} - \epsilon_0 (\nabla \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E} \quad (21.41)$$

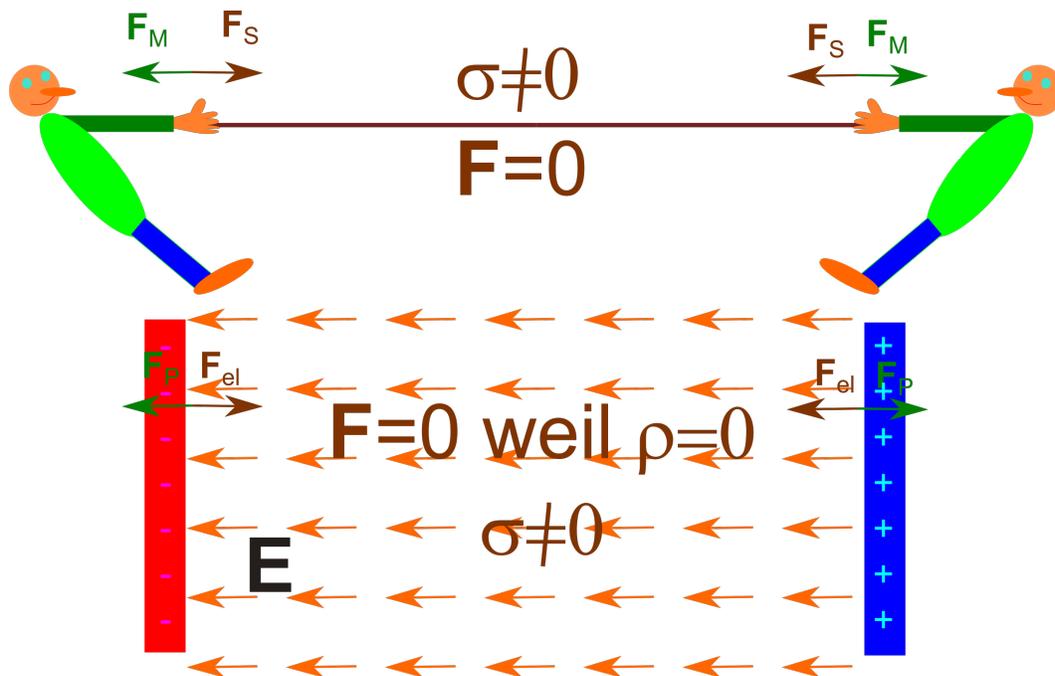
$$= \epsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{E}\mathbf{E}) - \frac{\epsilon_0}{2} \nabla E^2 \quad (21.42)$$

$$= \nabla \cdot \left[ \epsilon_0 \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \mathbb{1} \right] \quad (21.43)$$

Die Größe

$$\boldsymbol{\sigma}_{el} = \epsilon_0 \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \mathbb{1} \quad (21.44)$$

heißt Maxwellscher Spannungstensor der Elektrostatik. Eine unter mechanischer Spannung liegende Region wo  $\boldsymbol{\sigma}_{el} \neq 0$  aber  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{el} = 0$  gilt, ist eine Region wo durch mechanische Spannung (im elektrischen Feld) Kraft übertragen wird, aber selbst keine Kräfte wirken. Die Situation ist die selbe, wie in der Mechanik beim Tauziehen. Solange die tauziehenden Mannschaften an den Enden



**Abbildung 21.3:** Ein unter mechanischer Spannung stehendes kräftefreies Seil überträgt die Kraft zwischen zwei Tauziehern. Der unter der Maxwellspannung stehende kräftefreie Zwischenraum des Kondensators überträgt die Kraft zwischen den Platten.

des Seils mit gleicher Kraft ziehen, wirkt auf das Seil keine Kraft, da es nicht beschleunigt wird, es ist jedoch unter mechanischer Spannung. Der Raum zwischen zwei Kondensatorplatten ist unter mechanischer Spannung, überträgt die Kraft von der einen auf die andere Kondensatorplatte, wird aber selbst durch keinerlei Kraft beschleunigt.



## Kapitel 22

# Bilanzgleichungen der Energie und des Impulses

In dieser Vorlesung formulieren wir die allgemeine Form einer Bilanzgleichung der Kontinuumsbeschreibung. Wir leiten die Energiebilanz und Impulsbilanz für das elektromagnetische Feld ab. Zusammen mit der Materie ist sowohl die Energie als auch der Impuls erhalten. Eine kräftefreie Region unter mechanischer Spannung kann Impuls übertragen. Die Energiestromdichte des Feldes wird durch den Poyntingvektor beschrieben. Wir zeigen die Energiestromdichte für ebene laufende und stehende elektromagnetische Wellen.

## 22.1 Lokale Erhaltungssätze

Wir haben in Vorlesung 8 die Erhaltung der Ladung mittels der Kontinuitätsgleichung in einer Kontinuumsbeschreibung kennengelernt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (22.1)$$

die nach Integration über ein endliches Volumen die Form

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \int_V d^3 \mathbf{r} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial Q}{\partial t} + \int_{\partial V} d^2 S \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (22.2)$$

annimmt. Die Ladung kann sich nur verändern, indem sie durch den Rand des Volumens ein- bzw. ausströmt. Eine analoge Kontinuitätsgleichung haben wir für die Massendichte  $\rho_m$  in der Mechanik kennengelernt. Ebenso fanden wir für die Impulserhaltung in der Fluidodynamik die Gleichung

$$\frac{\partial \rho_m \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \sigma \quad (22.3)$$

wobei der Term  $(\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v})$  den Strom des Impulse infolge der Advektion des Flüssigkeitsvolumen beschreibt, und  $-\sigma$  den Strom des Impulses in Folge lokaler, über die gemeinsamen Ränder zweier Flüssigkeitsvolumina vermittelter, kurzreichweitiger Oberflächenkräfte.

Ganz allgemein hat die Struktur eines Erhaltungssatzes in der Kontinuumsbeschreibung die Form:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_\psi = 0, \quad (22.4)$$

wobei  $\psi$  die skalare, vektorielle oder tensorielle Dichte der Erhaltungsgröße  $\Psi = \int_V \psi d^3 \mathbf{r}$  ist,  $\mathbf{j}_\psi$  die Stromdichte der Erhaltungsgröße. Ist  $\psi$  eine Tensor  $n$ ter Stufe, dann ist  $\mathbf{j}_\psi$  ein Tensor  $(n + 1)$ ter Stufe. Die allgemeine kontinuumstheoretische Formulierung der Bilanz einer nicht erhaltenen Größe ist:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_\psi = q_\psi, \quad (22.5)$$

bei der  $q_\psi$  der Quellterm heißt. Ist  $q_\psi(\mathbf{r}) > 0$  so nimmt an der Stelle  $\mathbf{r}$  die Dichte  $\psi$  zu, ohne dass über den Rand etwas hinzufießen müßte. Die Größe  $\Psi$  wird aus dem nichts erzeugt. Ist  $q_\psi(\mathbf{r}) < 0$  so nimmt an der Stelle  $\mathbf{r}$  die Dichte  $\psi$  ab, ohne dass über den Rand etwas abfließen müßte. Die Größe  $\Psi$  wird an der Stelle  $\mathbf{r}$  vernichtet. Oft kommt es vor, dass man zwei verschiedene nichterhaltene Dichten  $\psi_1, \psi_2$  hat, die einen entgegengesetzten Quellterm besitzen:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\psi_1} = q_\psi \quad (22.6)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{\psi_2} = -q_\psi. \quad (22.7)$$

Die Summe beider Dichten ist dann eine erhaltene Dichte

$$\frac{\partial (\psi_1 + \psi_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_{\psi_1} + \mathbf{j}_{\psi_2}) = 0. \quad (22.8)$$

Der Quellterm  $q_\psi$  erzeugt  $\Psi_1$  indem er  $\Psi_2$  vernichtet.  $\Psi_1$  wird in  $\Psi_2$  verwandelt und  $\psi_1 + \psi_2$  ist lokal erhalten.

## 22.2 Energiebilanz

Ein für uns wichtiges Beispiel ist die Umwandlung von Feldenergiedichte  $\psi_1 = u_{Feld}$  in Energiedichte der Materie  $\psi_2 = u_{Materie}$ .

Die Bilanzgleichung der Feldenergie lautet

$$\frac{\partial u_{Feld}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathcal{P}. \quad (22.9)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{S}$  die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes und  $\mathcal{P}$  die Leistungsdichte des Feldes an der Materie. Die Energie des Feldes wird vernichtet durch Leistung des Feldes an der Materie.

Die Bilanzgleichung der Energie der Materie lautet

$$\frac{\partial u_{Materie}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_E = \mathcal{P}. \quad (22.10)$$

wobei  $\mathbf{j}_E$  die Energiestromdichte in der Materie bezeichnet, und die Energie, die dem Feld verlorengegangen ist in der Materie als materielle Energiedichte wieder auftaucht weil sie durch die Leistung  $\mathcal{P}$  vom Feld auf die Materie übertragen wird.

## 22.3 Impulsbilanz

Auch die Impulserhaltung gilt nur für den Impuls des elektromagnetischen Feldes plus den Impuls der Materie. Wir schreiben den Impulserhaltungssatz für den Gesamtimpuls (Feld + Materie) auf:

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{Materie}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (22.11)$$

wobei  $\mathbf{p}_{Materie}$  die Impulsdichte der Materie  $\mathbf{g}$  die Impulsdichte des Feldes und  $-\boldsymbol{\sigma}$  die Impulsstromdichte bezeichnet. Die Impulsstromdichte ist der negative Spannungstensor. Wir betrachten den statischen Spezialfall, indem sämtliche Zeitableitungen verschwinden und deshalb

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (22.12)$$

gilt. Für den Spannungstensor finden wir

$$-\boldsymbol{\sigma} = - \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{el}}_{\text{Impulsstrom des Feldes}} + \underbrace{\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v}}_{\text{Impulsstrom der Materie durch Advektion}} - \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{mech}}_{\text{Impulsstrom der Materie durch mechanische Oberflächenkräfte}} \quad (22.13)$$

wobei

$$\boldsymbol{\sigma}_{el} = \epsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E} - \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \mathbb{1} \quad (22.14)$$

den elektrostatischen Maxwellschen Spannungstensor des Feldes bezeichnet.

## 22.4 Dynamische Energie-Impulserhaltung

Die relativistische Erweiterung des Impulssatzes zum Energie-Impulssatz liefert uns die Bilanzgleichungen für den allgemeinen dynamischen Fall. Wir kombinieren die Leistungsdichte und Kraftdichte zu einem Vierervektor

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P} \\ \mathbf{c}\mathbf{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \\ c(\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \epsilon_3 \cdot c\mathbf{B} \end{pmatrix} \cdot_4 \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} = \mathcal{F} \cdot_4 \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} \quad (22.15)$$

verallgemeinern den Maxwell'schen Spannungstensor zum relativistischen Viererspannungstensor

$$\sigma_{el} = \epsilon_0 \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \mathbb{1} \quad (22.16)$$

→

$$\sigma_4 = \frac{\epsilon_0}{2} \mathcal{F} \cdot_4 \mathcal{F} - \frac{\epsilon_0}{4} (\mathcal{F} \cdot_4 \mathcal{F}) \mathbb{1}_4 \quad (22.17)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B}^2 & \epsilon_0 c \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\ \epsilon_0 c \mathbf{E} \times \mathbf{B} & \epsilon_0 \mathbf{E}\mathbf{E} + \epsilon_0 c^2 \mathbf{B}\mathbf{B} - \left( \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B}^2 \right) \mathbb{1}_3 \end{pmatrix} \quad (22.18)$$

Zusammen mit

$$\nabla_4 = \begin{pmatrix} -c\partial t \\ \nabla \end{pmatrix} \quad (22.19)$$

erweitern wir Gleichung 22.12 zu

$$\nabla_4 \cdot_4 \sigma_4 = \mathbf{0}_4 \quad (22.20)$$

Wir brauchen die Richtigkeit der Gleichung 22.20 nicht zu überprüfen, denn sie ist die relativistisch invariante Erweiterung der Gleichung 22.12 und muss wegen der Lorentzinvarianz der Maxwellgleichungen die richtige Verallgemeinerung sein.

Wir erhalten so die Energiebilanz

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left( \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \mathbf{B}^2 \right)}_{\text{Energiedichte des Feldes}} + \nabla \cdot \underbrace{\epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}}_{\text{Energiestromdichte des Feldes}} = - \underbrace{\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}}_{\text{Leistungsdichte des Feldes an der Materie}} \quad (22.21)$$

und die Gesamtimpulserhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}}_{\text{Impulsdichte des Feldes}} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\rho_m \mathbf{v}}_{\text{Impulsdichte der Materie}} + \nabla \cdot \underbrace{\rho_m \mathbf{v}\mathbf{v}}_{\text{Advektiver Impulsstrom der Materie}} = \underbrace{\sigma_{el}}_{\text{-Impulsstrom des Feldes}} + \underbrace{\sigma_{mech}}_{\text{-Impulsstrom in der Materie durch Oberflächenkräfte}} \quad (22.22)$$

Die Energiestromdichte

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (22.23)$$

bezeichnet man mit dem Namen der Poyntingvektor.

## 22.5 Beispiele für Energiefluß des Feldes

### 22.5.1 Laufende Welle

Wir betrachten eine ebene laufende elektromagnetische Welle

$$\mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \hat{\mathbf{Z}} \cos(\omega t - k_x x) \mathbf{e}_y \quad (22.24)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\omega k_x}{c^2} \hat{\mathbf{Z}} \cos(\omega t - k_x x) \mathbf{e}_z \quad (22.25)$$

und berechnen den Poyntingvektor

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\epsilon_0 \omega^3 k_x}{c^2} \hat{\mathbf{Z}}^2 \cos^2(\omega t - k_x x) \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z \quad (22.26)$$

$$\propto \cos^2(\omega t - k_x x) \mathbf{e}_x \quad (22.27)$$

und sehen, dass der Energiefluss entlang des Wellenvektors gerichtet ist (Abbildung 22.1), und in den Wellenbäuchen besonders viel Energie strömt, während der Energiestrom in den Knotenpunkten verschwindet. Die Impulsdichte  $\mathbf{S}/c^2$  verhält sich genauso wie die Energiestromdichte.

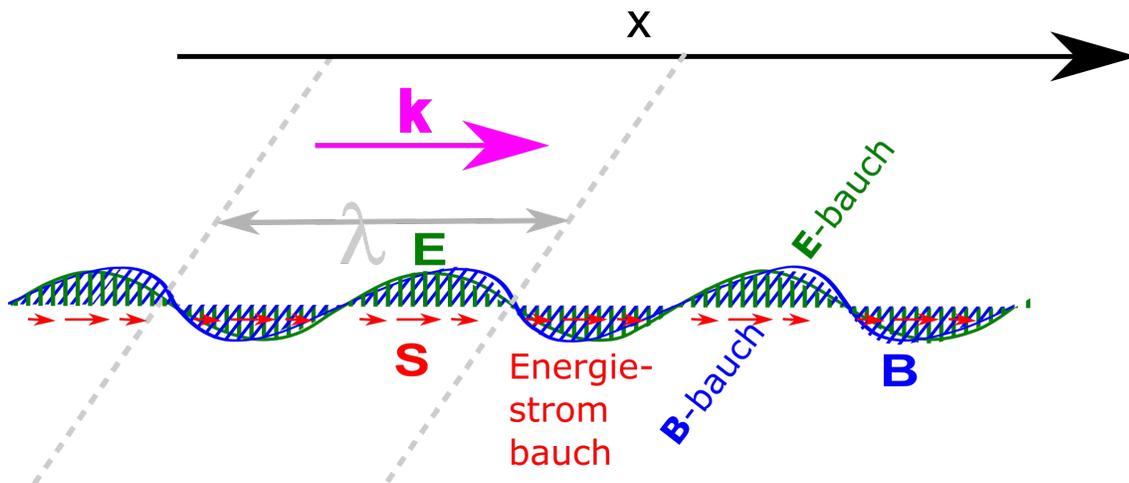
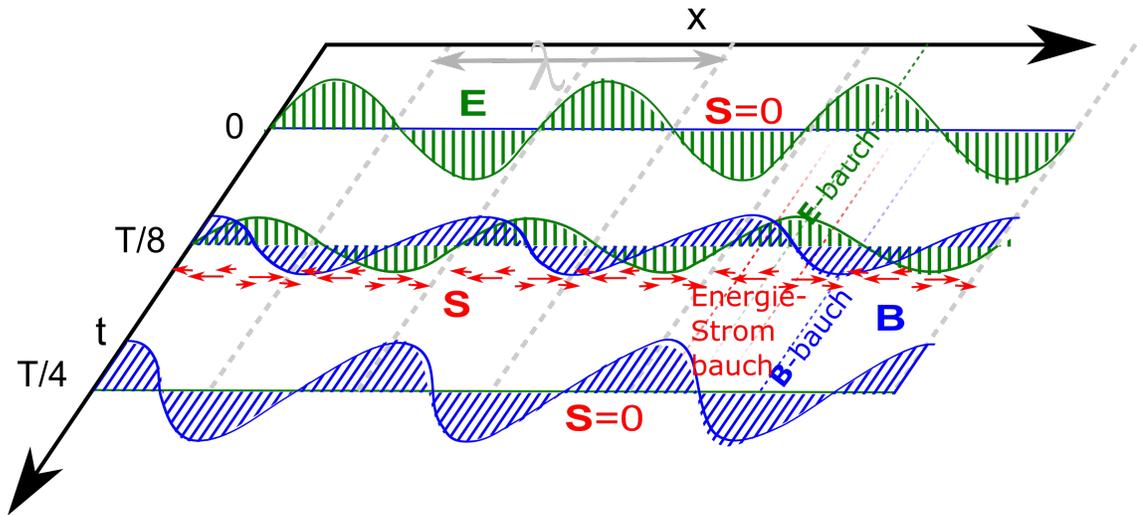


Abbildung 22.1: E-Feld, B-Feld und Energiestromdichte  $\mathbf{S}$  einer laufenden elektromagnetischen Wellen

### 22.5.2 Stehende Welle

Wir betrachten eine ebene stehende elektromagnetische Welle



**Abbildung 22.2:** E-Feld, B-Feld und Energiestromdichte einer stehenden elektromagnetischen Wellen als Funktion von Ort und Zeit

$$\mathbf{E} = -\frac{2\omega^2}{c^2} \hat{\mathbf{z}} \cos(k_x x) \cos(\omega t) \mathbf{e}_y \quad (22.28)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{2\omega k_x}{c^2} \hat{\mathbf{z}} \sin(k_x x) \sin(\omega t) \mathbf{e}_z \quad (22.29)$$

und berechnen den Poyntingvektor

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\epsilon_0 \omega^3 k_x}{c^2} \hat{\mathbf{z}}^2 \sin(2\omega t) \sin(2k_x x) \mathbf{e}_x \quad (22.30)$$

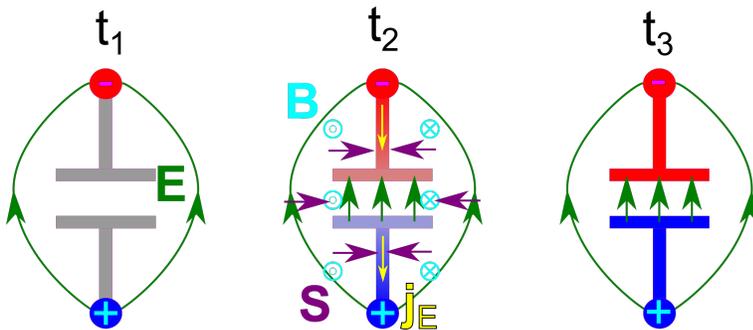
und sehen (Abbildung 22.2), dass der maximale Energiefluss entlang der  $x$ -Richtung von **E**-Bauch zu **B**-Bauch zu den Zeiten  $t = T/8, 5T/8$  auftritt, bzw. in umgekehrte Richtung zu den Zeiten  $t = 3T/8, 7T/8$ , und zwar genau zwischen den beiden Bäuchen bei  $x = \lambda/8, 3\lambda/8, 5\lambda/8$  und  $7\lambda/8$ . Das sind die Zeiten und Orte zwischen den maximalen elektrischen und maximalen magnetischen Energiedichten.

### 22.5.3 Aufladen eines Kondensators

Wir betrachten den Energiefluss beim Aufladen eines Kondensators (Abbildung 22.3). Zunächst (zur Zeit  $t_1$ ) ist die Energie im elektrischen Feld der Batterie zwischen den beiden Polen der Batterie gespeichert und alle Elektronen sind in Ruhe. Zur Zeit  $t_2$  während des Aufladens hat sich ein magnetisches Flussdichtefeld  $\mathbf{B}$  gebildet weil sich das elektrische Feld mit der Zeit verändert. Der dadurch entstehende Poyntingvektor zeigt vom elektrischen Feld in Richtung Draht, bzw. ins Innere zwischen den beiden Kondensatorplatten. Im Draht fließt die Energie in die Elektronen, die Driftgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  aufnehmen und zu einer materiellen Energiestromdichte  $\mathbf{j}_E = \mathbf{v} \rho_m v^2 / 2$  vom

-Pol zum +Pol führen. Im Kondensator fließt mit dem Poyntingvektor Energie aus dem äußeren elektrischen Feld in das Innenfeld zwischen den beiden Platten. Zur Zeit  $t_3$  ist die magnetische Flussdichte und mit ihr der Poyntingvektor und die materielle Energiestromdichte verschwunden. Der Kondensator ist im aufgeladenen Gleichgewichtszustand.

Beachten Sie, dass die elektrischen Feldlinien in Ladungen enden und der Draht ungeladen ist. Es verschwinden deshalb elektrische Feldlinien zwischen den Polen der Batterie und tauchen dafür zwischen den Kondensatorplatten wieder auf. Feldlinien können nur verschwinden wenn durch  $\partial_t \mathbf{E} \neq \mathbf{0}$  magnetische Flussdichte  $\mathbf{B}$  induziert wird. Der Poyntingvektor  $\mathbf{S}$  läßt die Energie von einem Ort zum anderen Ort kontinuierlich strömen, er springt nicht wie die elektromagnetischen Felder. Es werden nicht die elektromagnetischen Felder sondern die Energie des elektromagnetischen Feldes transportiert.



**Abbildung 22.3:**  $\mathbf{E}$ -Feld,  $\mathbf{B}$ -Feld und Energiestromdichte  $\mathbf{S}$  des Feldes und Energiestromdichte  $\mathbf{j}_E = \mathbf{v}\rho_m v^2/2$  der Elektronen beim Aufladen eines Kondensators.  $t_1$  vor dem Auflade,  $t_2$  während des Aufladens,  $t_3$  aufgeladener Zustand.

## 22.6 Übungen

### 22.6.1 Lecherleitung

Eine Lecherleitung besteht aus zwei parallelen zylindrischen Leitern mit Radius  $a$  im Abstand  $d \gg a$  zueinander. Berechnen Sie das elektromagnetische Feld einer Lecherleitung, den Strom und die Ladungsdichte, sowie die Impedanz der Lecherleitung.

### 22.6.2 Einschaltvorgang bei einer Spule

Eine Spule mit endlichem Widerstand wird an eine Batterie angeschlossen. Erklären Sie den Energiefluss des Feldes beim Einschaltprozess.

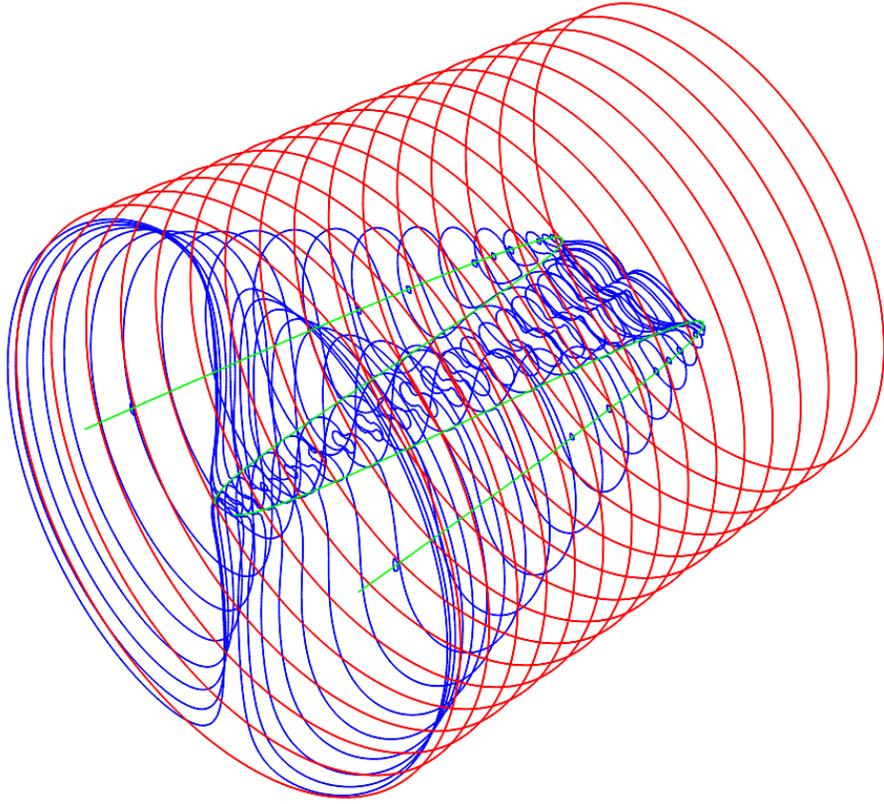
### 22.6.3 Experiment: Form eines flexiblen stromdurchflossenen Drahtes

Besorgen Sie sich einen möglichst flexiblen Draht und legen ihn auf einen reibungsfreien Tisch. Welche Form nimmt der Draht an wenn die beiden Enden nah beieinander festgehalten werden und ein Strom durch den Draht fließt? Welche Form nimmt er an wenn er aufgehängt wird? Erklären Sie das Phänomen mit dem Maxwell'schen Spannungstensor.

### 22.6.4 Programmierung: Bewegter Plattenkondensator

Berechnen Sie den Energie-Impulstensor eines ruhenden Plattenkondensators als Funktion von Ort und Zeit. Führen Sie eine Lorentztransformation des Energie-Impulstensors mit einer großen Geschwindigkeit durch, so dass die Platten sich unter einem Winkel von 45 Grad zur unbewegten Feldrichtung bewegen. Plotten Sie den so entstehenden Poyntingvektor und die Weltlinien der Platten in einem dreidimensionalen  $xyt$  Diagramm.





## Kapitel 23

# Der Hertzsche Dipol

In dieser Vorlesung lösen wir die Wellengleichung für den Hertzsche Vektor für einen elektrischen Punktdipolsender. Alle Feldlinien des elektromagnetischen Feldes hängen entweder am Dipol fest, oder Sie formen geschlossene Linien die im Falle des Magnetfeldes die Polachse umkreisen, im Falle des elektrischen Feldes ein Wirbelzentrum umkreisen. Das elektrische Feld kann sich vom Dipol ablösen, indem zunächst ein neues Wirbelzentrum zusammen mit einem Abnabelring entsteht, und später der Abnabelring sich im Ursprung zusammenzieht wenn die Ladungsdichte des Dipols verschwindet. Die elektrischen Feldwirbel zwängen sich zwischen nicht gleichmässig separierte Kugelflächen und meiden die polaren Regionen.

### 23.1 Skalare Wellengleichung mit Quellterm

Wir betrachten eine skalare Wellengleichung der Form

$$\left(-\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (23.1)$$

mit der orts- und zeitabhängigen Amplitude  $\psi(\mathbf{r}, t)$  der Welle und dem orts- und zeitabhängigen Quellterm  $\rho(\mathbf{r}, t)$ . Wenn wir in Gleichung 23.1 die Zeitableitungen zu Null setzen  $\partial_t = 0$  finden wir die Poisson Gleichung:

$$-\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad (23.2)$$

wieder, die aussagt das die Ladungen die Quellen des elektrostatischen Potentials sind. Eine dynamische Punktquelle

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta^3(\mathbf{r})e^{i\omega t} \quad (23.3)$$

ist eine Quelle die im Ursprung als Funktion der Zeit ständig ihr Vorzeichen wechselt. Eine solche oszillierende Ladung ist unphysikalisch, da Ladungserhaltung gilt. Wir wollen hier trotzdem den Boden der Physik verlassen und eine genau solche Situation mathematisch analysieren. Das Studium einer dynamischen Skalarwelle mit Punktquelle wird uns helfen den physikalisch komplizierteren Fall eines Hertzschen Dipolpunktstrahlers besser zu verstehen.

Wir machen für die Wellengleichung 23.2 mit dynamischer Punktquelle den Ansatz

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r})e^{i\omega t} \quad (23.4)$$

und finden

$$-\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \phi(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r}) \quad (23.5)$$

### 23.2 Weitere mathematische Spielereien

Wir berechnen den Gradienten des inversen Abstands vom Ursprung:

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (23.6)$$

$$\nabla \nabla \frac{1}{r} = \nabla \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = ? \quad (23.7)$$

und fragen nach dem Wert des doppelten Gradienten des inversen Abstands. Wir integrieren hierzu den doppelten Gradienten über das Volumen einer um den Ursprung zentrierten Kugel mit Radius  $\epsilon$

$$\int_{r < \epsilon} d^3\mathbf{r} \nabla \nabla \frac{1}{r} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{r=\epsilon} d^2 S \mathbf{e}_r \nabla \frac{1}{r} \quad (23.8)$$

$$= - \int_{r=\epsilon} d^2 S \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \frac{1}{r^2} \quad (23.9)$$

$$= - \int_0^\pi \epsilon^2 \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \frac{1}{\epsilon^2} \quad (23.10)$$

$$= - \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r. \quad (23.11)$$

Wir benutzen

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (23.12)$$

womit folgt

$$\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi & \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi & \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi & \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (23.13)$$

Wir finden

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \pi \sin^2 \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & \pi \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \cos^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (23.14)$$

und

$$\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \quad (23.15)$$

$$= \int_{-1}^1 d(\cos \vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r = \int_{-1}^1 dc \begin{pmatrix} \pi(1-c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \pi(1-c^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi c^2 \end{pmatrix} \quad (23.16)$$

$$= \begin{pmatrix} \pi(c-c^3/3) & 0 & 0 \\ 0 & \pi(c-c^3/3) & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi c^3/3 \end{pmatrix} \Big|_{c=-1}^{c=1} = \frac{4\pi}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23.17)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \mathbb{1} \quad (23.18)$$

Wir folgern also, dass

$$\int_{r<\epsilon} d^3\mathbf{r} \nabla \nabla \frac{1}{r} = -\frac{4\pi}{3} \mathbb{1} \quad (23.19)$$

gilt und deshalb  $\nabla \nabla 1/r$  bei  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  einen Peak des Volumens  $4\pi/3 \mathbb{1}$  hat. Damit wird

$$\nabla \nabla \frac{1}{r} = -\nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{4\pi}{3} \mathbb{1} \delta^3(\mathbf{r}) - \left\{ \nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right\} \quad (23.20)$$

ausgewertet  
bei  $r > 0$

$$= -\frac{4\pi}{3} \mathbb{1} \delta^3(\mathbf{r}) - \frac{r^3 \nabla \mathbf{r} - \mathbf{r} \nabla r^3}{r^6} \quad (23.21)$$

$$= -\frac{4\pi}{3} \mathbb{1} \delta^3(\mathbf{r}) - \frac{r^3 \mathbb{1} - 3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^6} \quad (23.22)$$

$$= -\frac{4\pi}{3} \mathbb{1} \delta^3(\mathbf{r}) - \frac{r^2 \mathbb{1} - 3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \quad (23.23)$$

Wir berechnen jetzt

$$\nabla \nabla \frac{e^{-ikr}}{r} = \nabla \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-ikr}}{r} \right) (\nabla r) \quad (23.24)$$

$$= \nabla \frac{\mathbf{r} - ikre^{-ikr} - e^{-ikr}}{r^2} \quad (23.25)$$

$$= \nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} (-ikr - 1) e^{-ikr} \quad (23.26)$$

$$= (-ikr - 1) e^{-ikr} \nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \left( \frac{\partial}{\partial r} (-ikr - 1) e^{-ikr} \right) (\nabla r) \quad (23.27)$$

$$\stackrel{Gl. 23.23}{=} (-ikr - 1) e^{-ikr} \left[ \frac{4\pi}{3} \mathbb{1} \delta^3(\mathbf{r}) + \frac{r^2 \mathbb{1} - 3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \right] + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^4} ((-ik - (-ikr - 1)ik) e^{-ikr}) \quad (23.28)$$

$$= -\frac{4\pi}{3} \mathbb{1} \delta^3(\mathbf{r}) - k^2 \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} \frac{e^{-ikr}}{r} + (-ikr - 1) e^{-ikr} \frac{r^2 \mathbb{1} - 3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \quad (23.29)$$

Wir berechnen

$$\nabla \cdot \nabla \frac{e^{-ikr}}{r} = -\frac{4\pi}{3} (1 + 1 + 1) \delta^3(\mathbf{r}) - k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} + (-ikr - 1) e^{-ikr} \frac{r^2(1 + 1 + 1) - 3\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \quad (23.30)$$

$$= -4\pi \delta^3(\mathbf{r}) - k^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (23.31)$$

und finden also die Beziehung

$$(\nabla^2 + k^2) \frac{e^{-ikr}}{r} = -4\pi \delta^3(\mathbf{r}) \quad (23.32)$$

Wir können jetzt die Lösung der skalaren Wellengleichung

$$\left( -\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\mathbf{r}, t) = q e^{i\omega t} \delta^3(\mathbf{r}) \quad (23.33)$$

ablesen und finden

$$\psi(\mathbf{r}, t) = q \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r}. \quad (23.34)$$

Dies sind kugelförmige Wellen deren Wellenfronten einen Abstand der Wellenlänge  $\lambda = 2\pi/k$  haben, und deren Amplitude umgekehrt proportional zum Abstand abnimmt (Abbildung 23.1). Weil aber die Ladung in der Elektrodynamik erhalten ist können wir diese skalare Welle nicht zur Beschreibung einer dynamisch variierenden lokalisierten Ladungsverteilung benutzen.

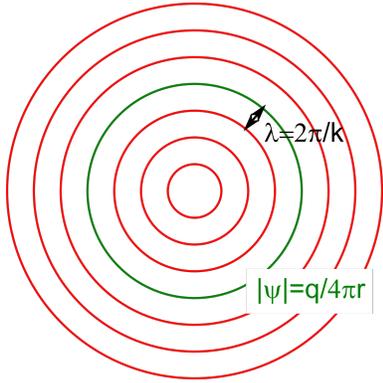


Abbildung 23.1: Wellenfronten einer skalaren Kugelwelle

### 23.3 Hertzscher Dipol

Zur Beschreibung eines Punktsenders brauchen anstatt der skalaren Wellengleichung die Vektorwellengleichung für den Hertzschen Vektor

$$\left(-\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad (23.35)$$

mit der Polarisation  $\mathbf{P}$  als Quellterm. Für die Polarisation können wir eine oszillierende Punktquelle der Form

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p} e^{i\omega t} \delta^3(\mathbf{r}) \quad (23.36)$$

mit dem dynamischen Dipolmoment  $\mathbf{p} e^{i\omega t}$  ansetzen, denn die Kontinuitätsgleichung wird für  $\rho = \nabla \cdot \mathbf{P}$  und  $\mathbf{j} = \partial_t \mathbf{P}$  automatisch erfüllt. Die Ströme fließen im Punkt  $\mathbf{r} = 0$  abwechselnd in Richtung  $\mathbf{p}$  bzw. entgegen der Richtung  $\mathbf{p}$  und die Ladungsdichte ist an den Enden des Dipols konzentriert.

Die Lösung der Wellengleichung zur Punktquelle lautet

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (23.37)$$

Wir erhalten die elektromagnetischen Felder über

$$\mathbf{B} = i \frac{\omega}{c^2} \nabla \times \mathbf{Z} \quad (23.38)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \nabla \cdot \mathbf{Z} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{Z} \quad (23.39)$$

und finden

$$\mathbf{B} = i \frac{\omega}{c^2} (\nabla \times \mathbf{p}) \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (23.40)$$

$$= -i \frac{\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{p} \times \underbrace{\nabla \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}}_{\text{Gl. 23.26}} \quad (23.41)$$

$$= -\frac{\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{p} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} (-kr - i) e^{i(\omega t - kr)} \quad (23.42)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{k^2}{4\pi\epsilon_0 c} \mathbf{e}_r \times \mathbf{p} \left(1 + \frac{i}{kr}\right) \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \quad (23.43)$$

$$\mathbf{E} = -\left( \underbrace{\nabla \nabla}_{\text{Gl. 23.29}} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbb{1} \right) \cdot \mathbf{p} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (23.44)$$

$$= \left[ \frac{4\pi}{3} \mathbb{1} \delta^3(\mathbf{r}) e^{i\omega t} + k^2 \left( \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} - \mathbb{1} \right) \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} - (-ikr - 1) e^{i(\omega t - kr)} \frac{r^2 \mathbb{1} - 3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \right] \cdot \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \quad (23.45)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3} \frac{\mathbf{p}}{\epsilon_0} \delta^3(\mathbf{r}) e^{i\omega t} + \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p})) \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} + (ikr + 1) e^{i(\omega t - kr)} \frac{r^2 \mathbb{1} - 3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \cdot \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \quad (23.46)$$

Wir nehmen den Realteil um eine physikalische Lösung zu bekommen und erhalten

$$\Re \mathbf{B} = -\underbrace{\frac{k^2}{4\pi\epsilon_0 c} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \frac{\cos(\omega t - kr)}{r}}_{\text{magnetisches Fernflussdichtefeld}} + \underbrace{\frac{k^2}{4\pi\epsilon_0 c} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \frac{\sin(\omega t - kr)}{kr^2}}_{\text{magnetisches Nahflussdichtefeld}} \quad (23.47)$$

$$\begin{aligned} \Re \mathbf{E} = & \underbrace{\frac{\mathbf{p}}{3\epsilon_0} \delta^3(\mathbf{r}) \cos(\omega t)}_{\text{elektrisches Innenfeld des Dipols}} + \underbrace{\frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p})) \frac{\cos(\omega t - kr)}{r}}_{\text{elektrisches Fernfeld}} \\ & + \underbrace{(-kr \sin(\omega t - kr) + \cos(\omega t - kr)) \frac{r^2 \mathbb{1} - 3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \cdot \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0}}_{\text{elektrisches Nahfeld}} \end{aligned} \quad (23.48)$$

Das elektromagnetische Feld eines Hertzschen Dipols hat viele Facetten, was alleine schon an der Komplexität der Formeln 23.47 und 23.48 deutlich wird. Wir müssen deshalb die einzelnen Aspekte der Gleichungen 23.47 und 23.48 genauer untersuchen und diskutieren im Folgenden spezifische Grenzfälle des Hertzschen Dipolfeldes.

Wir beginnen mit dem

### 23.3.1 Statischen Grenzfall $\omega \rightarrow 0$

Im statischen Grenzfall  $\omega = kc \rightarrow 0$  finden wir, dass die magnetische Flussdichte verschwindet

$$\mathbf{B}(\omega \rightarrow 0) = 0 \quad (23.49)$$

und das elektrische Feld nimmt die Form

$$\mathbf{E}(\omega \rightarrow 0) = \frac{\mathbf{p}}{3\epsilon_0} \delta^3(\mathbf{r}) + \frac{r^2 \mathbb{1} - 3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \cdot \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \quad (23.50)$$

eines statischen Dipolfelds an.

Wir betrachten das

### 23.3.2 Fernfeld $r \rightarrow \infty$

Weit weg vom Dipol ( $r > \lambda$ ) können wir Felder die stärker als umgekehrt proportional zum Abstand abfallen vernachlässigen und wir finden das Fernfeld

$$\mathbf{B}(r \rightarrow \infty) = -\frac{k^2}{4\pi\epsilon_0 c} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \frac{\cos((\omega t - kr))}{r} \quad (23.51)$$

$$\mathbf{E}(r \rightarrow \infty) = \frac{k^2}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p})) \frac{\cos((\omega t - kr))}{r}. \quad (23.52)$$

Im Fernfeld gilt

$$\frac{E(r \rightarrow \infty)}{B(r \rightarrow \infty)} = c, \quad (23.53)$$

$\mathbf{E}(r \rightarrow \infty)$  und  $\mathbf{B}(r \rightarrow \infty)$  sind in Phase und die Maxima von  $B$  und  $E$  stimmen in Ort und Zeit überein. Es gilt

$$\mathbf{E}(r \rightarrow \infty) \cdot \mathbf{B}(r \rightarrow \infty) = 0, \quad (23.54)$$

so dass beide Felder senkrecht aufeinander stehen. Wenn wir das elektromagnetische Feld in Richtung

$$\mathbf{r} = r \frac{\mathbf{p}}{p} \quad (23.55)$$

betrachten finden wir, dass sowohl  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  als auch  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  in dieser Abstrahlrichtung verschwinden. Es erfolgt keine Abstrahlung entlang der Ausrichtung des Hertzschers Dipols.

Der Poyntingvektor des Fernfelds beträgt

$$\mathbf{S}(r \rightarrow \infty) = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E}(r \rightarrow \infty) \times \mathbf{B}(r \rightarrow \infty) \quad (23.56)$$

$$= -\frac{k^4 c p^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\cos^2(\omega t - kr)}{r^2} (\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_p)) \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_p) \quad (23.57)$$

$$= \frac{k^4 c p^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{\cos^2(\omega t - kr)}{r^2} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_p)^2 \mathbf{e}_r \quad (23.58)$$

$$= \frac{\omega^4 \sin^2 \vartheta p^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\cos^2(\omega t - kr)}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (23.59)$$

$$\propto \frac{\omega^4 \sin^2 \vartheta}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (23.60)$$

und ist in Abbildung 23.2 gegenüber dem Winkel  $\vartheta$  aufgetragen.

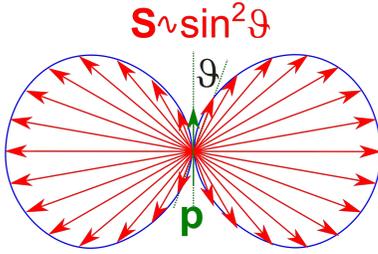


Abbildung 23.2: Abstrahlcharakteristik eines Hertzschen Dipols

Der Energiestrom durch eine Kugeloberfläche um den Hertzschen Dipol ist für jeden Kugelradius derselbe und es geht keine Energie zwischen zwei Kugeloberflächen verloren und es reichert sich auch keine Energie zwischen diesen an. Die über eine Schwingungsperiode gemittelte Energie fließt stationär  $\nabla \cdot \mathbf{S} = 0$  radial nach Außen.

Wir betrachten

### 23.3.3 Das Nahfeld $0 < r < \lambda = 2\pi/k$

Im Nahfeld  $0 < r < \lambda = 2\pi/k$  finden wir die Flussdichte

$$\mathbf{B}(0 < r < \lambda) = \frac{k}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r^2} (\mathbf{e}_r \times \mathbf{p}) \quad (23.61)$$

die um die Größenordnung  $kr/c$  schwächer ist als das elektrische Feld:

$$\mathbf{E}(0 < r < \lambda) = \cos(\omega t - kr) \frac{r^2 \mathbb{1} - 3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} \cdot \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0}, \quad (23.62)$$

das ein mit der Kugelwelle  $\cos(\omega t - kr)$  moduliertes statisches Dipolfeld ist. Die elektrischen Feldlinien des Nahfelds beginnen und enden am oszillierenden Dipol (dem Sender) wenn  $\cos(\omega t) \neq 0$ . Sie können sich vom Dipol nur zu den Zeitpunkten  $t_i = T/4 + iT/2$  mit  $\cos(\omega t_i) = 0$  ablösen vom Sender, also im Moment verschwindenden Dipolmoments, wenn die Stromdichte  $\mathbf{j} = \partial_t \mathbf{p} \cos(\omega t) \delta^3(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \omega \sin(\omega t) \delta^3(\mathbf{r})$  maximal ist. Die Tensorstruktur des elektrischen Dipolfeldes können wir umformen zu dem Ausdruck

$$r^2 \mathbb{1} - 3\mathbf{r}\mathbf{r} = r^2 (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta - 2\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r) \quad (23.63)$$

und das Dipolmoment

$$\mathbf{p} = p \mathbf{e}_z = p (\mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta), \quad (23.64)$$

so dass wir die Dipolwinkelcharakteristik durch

$$(r^2 \mathbb{1} - 3\mathbf{r}\mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} = pr^2 (\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta - 2\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r) \cdot (\mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta) \quad (23.65)$$

$$= pr^2 (-2\mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta) \quad (23.66)$$

und das elektrische Feld ist deshalb besonders stark in den polaren Regionen, während die magnetische Flussdichte wegen

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{p} = p \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta) = -p \mathbf{e}_\varphi \sin \vartheta \quad (23.67)$$

in der äquatorialen Region am stärksten ist. Das elektrische Feld ist am selben Ort gegenüber der magnetischen Flussdichte um  $\pi/2$  phasenversetzt was dazu führt, dass der Poyntingvektor

$$\mathbf{S}(0 < r < \lambda) = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E}(0 < r < \lambda) \times \mathbf{B}(0 < r < \lambda) \quad (23.68)$$

$$= \frac{p^2 \omega}{r^5 8 \pi^2 \epsilon_0} \sin(2\omega t - 2kr) (-2\mathbf{e}_r \cos \vartheta - \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta) \times (\mathbf{e}_\phi \sin \vartheta) \quad (23.69)$$

$$= \frac{p^2 \omega}{r^5 8 \pi^2 \epsilon_0} \sin(2\omega t - 2kr) (-\mathbf{e}_\vartheta \sin(2\vartheta) + \mathbf{e}_r \sin^2 \vartheta) \quad (23.70)$$

zeitlich oszilliert und deshalb im Mittel gar nicht abstrahlt. Vielmehr fließt die Energie zwischen dem polaren elektrischen Feld und der äquatorialen magnetischen Flussdichte hin und her.

## 23.4 Anpassungsprozesse

An Gleichung 23.47 erkennen wir, dass das elektromagnetische Feld ein transversal magnetisches (TM)-Feld ist, bei dem die magnetische Flussdichte überall senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der konzentrischen Kugelwellen um den Hertzschen Dipol steht, während das elektrische Feld auch Radialkomponenten besitzt. Auf den magnetischen Knotenflächen

$$\tan(\omega t - kr_B) = kr_B \quad \text{magnetischen Knotenfläche} \quad (23.71)$$

verschwindet das Magnetfeld. Das elektrische Feld hat sowohl eine radiale- als auch eine transversale Komponente. In der Äquatorialebene  $\vartheta = \pi/2$  verschwindet das radiale elektrische Feld. Auf den elektrischen Knotenlinien

$$\vartheta_E = \pi/2, \quad \tan(\omega t - kr_E) = \frac{1}{kr_E} - kr_E \quad \text{elektrische Knotenlinien} \quad (23.72)$$

verschwindet das elektrische Feld. Neben der Äquatorialebene  $\vartheta = \pi/2$  verschwindet das radiale elektrische Feld auch auf den elektrischen Separatrixkugelflächen

$$\tan(\omega t - kr_S) = \frac{1}{kr_S} \quad \text{elektrische Separatrixflächen.} \quad (23.73)$$

Am Ursprung wechseln sich die Entstehung einer magnetischen Knotenfläche alle Viertelperiode mit der Vernichtung einer äquatorialen elektrischen Knotenlinie zusammen mit der Entstehung einer Separatrix ab (Abbildung 23.3). Zwischen jeweils zwei Separatrixen windet sich das elektrische Feld um eine elektrische Knotenlinie herum, die als Zentrum des toroidalen elektrischen Wirbels fungiert. Die magnetischen Knotenflächen laufen mit der halben Lichtgeschwindigkeit radial aus dem Ursprung heraus und beschleunigen asymptotisch auf die Lichtgeschwindigkeit sobald man weit entfernt vom Hertzschen Dipol ist. Bevor die erste Viertelperiode der Schwingung vergangen ist entsteht im Ablöseabstand  $r_A = 0.22\lambda$  zwei übereinanderliegende äquatoriale gegenläufige elektrische Knotenlinien, von denen die eine ein Wirbelzentrum ist und nach außen wandert, die andere nach innen wandert und ein Feldlinienkreuzungspunkt ist (Abbildung 23.4). Eine Feldlinie durch den Feldlinienkreuzungspunkt läuft zunächst aus dem Dipol aus steigt über den Äquator und durchkreuzt ihn wieder im Feldlinienkreuzungspunkt, umläuft das Wirbelzentrum und kommt den an der Äquatorebene gespiegelten Anfangsweg wieder durch den Feldlinienkreuzungspunkt zurück. Alle Feldlinienkreuzungspunkte bilden einen Abnabelring, der die Feldlinien die nur um das Wirbelzentrum

kreisen von Feldlinien die am Dipol hängen trennt. Der Abnabelring schnürt sich zusammen und verschwindet nach dem eine Viertelperiode voll ist. Gleichzeitig tritt eine neue Separatrixkugelfläche am Ursprung aus, die das elektrische Wirbelfeld um das verbliebene Wirbelzentrum vollständig von dem wieder aus dem Dipol auslaufenden Feld abtrennt. An den elektrischen Knotenflächen wechselt das Vorzeichen der transversal Komponente des elektrischen Feldes und die Radialkomponente des Poyntingvektors. An den magnetischen Knotenflächen wechselt das Vorzeichen der magnetischen Flussdichte und der Radialkomponente des Poyntingvektors, an den Separatrixflächen ändert sich das Vorzeichen der Radialkomponente des elektrischen Feldes.

Innerhalb der innersten elektrischen Separatrixfläche laufen die elektrischen Feldlinien durch den elektrischen Dipol hindurch. Außerhalb dieser Separatrix winden sich die elektrischen Feldlinien um eine elektrische Knotenlinien herum. Die elektrischen Knotenlinien breiten sich mit Überlichtgeschwindigkeit aus, erreichen asymptotisch die Lichtgeschwindigkeit und fallen dann mit der vorausgegangenen magnetischen Knotenfläche zusammen. Da auf der Separatrix sowohl  $\mathbf{E}$  als auch  $\mathbf{B}$  transversal orientiert sind ist der Poyntingvektor auf der Separatrix radial gerichtet. Die elektrischen Knotenlinien kreuzen die magnetischen Knotenflächen bei einem Abstand  $r \approx \lambda/10$ . Bei diesem Abstand ist der Poyntingvektor am Äquator immer nach innen gerichtet, weil das magnetische Äquatorialfeld aufgebaut werden muss. Für große Abstände hingegen werden die Zeitintervalle nach innen gerichteten Poyntingvektors asymptotisch klein.

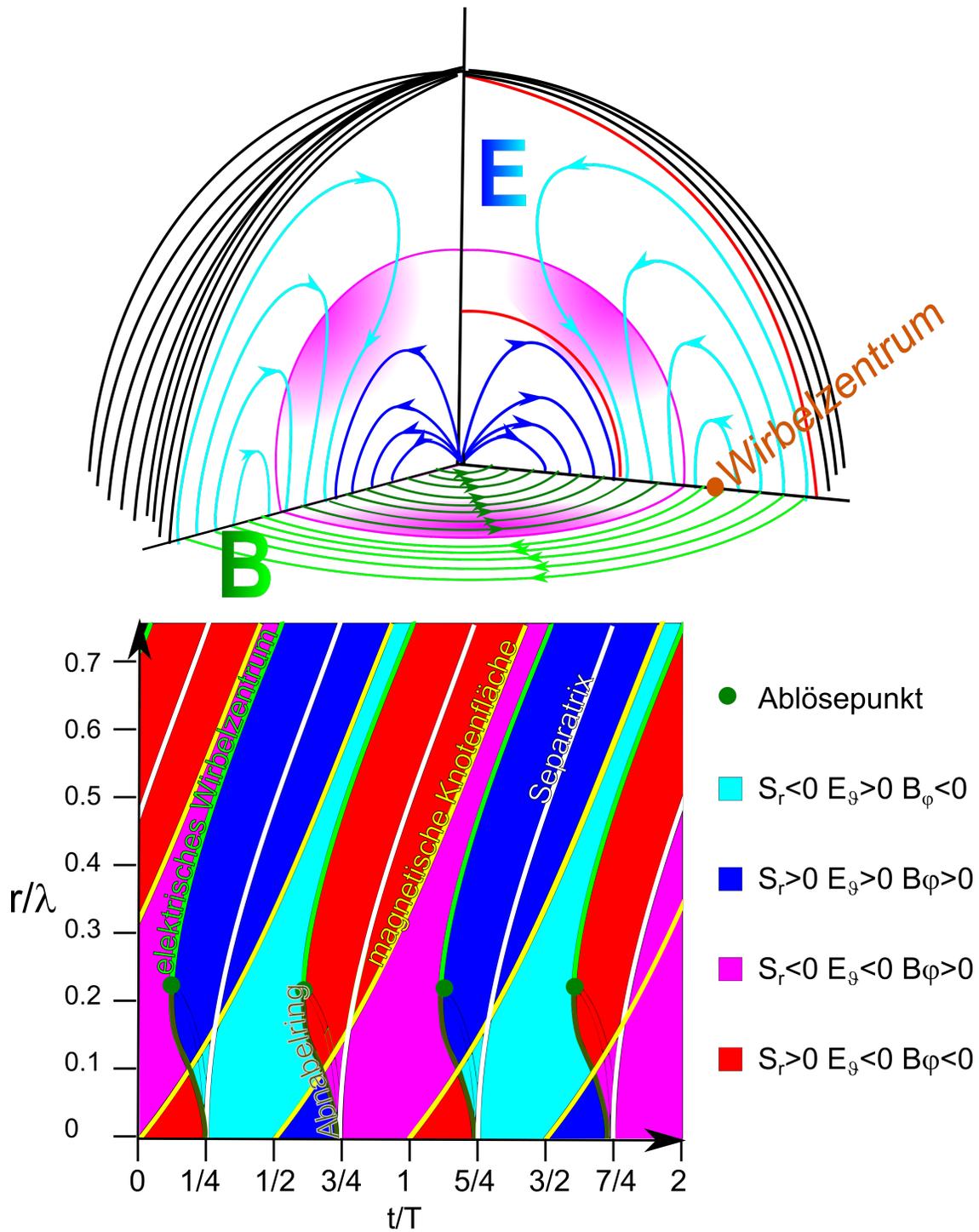
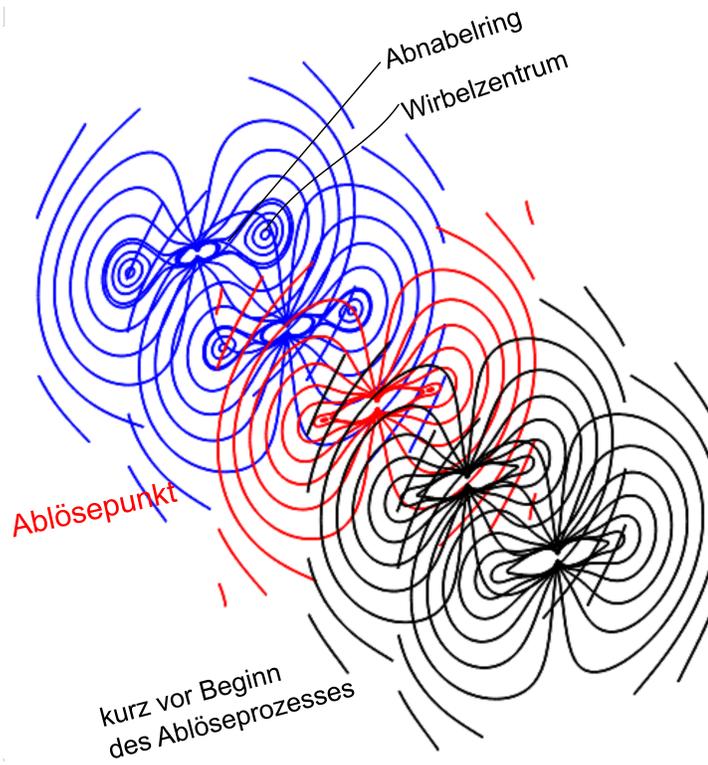


Abbildung 23.3: Wirbelpaarerzeugung, Ablösung des äusseren Wirbels vom Dipol und Propagation der elektrischen Toroidalwirbel in der Äquatorialebene



**Abbildung 23.4:** elektrische Feldlinien eines Hertzschen Dipols kurz vor und während des Ablöseprozesses.





## Kapitel 24

# Der Hertzsche Dipol und unser Himmel

In dieser Vorlesung besprechen wir physikalische Aspekte des Hertzschen Dipols. Wir zeigen dass der Himmel weiß und blau ist und der Sonnenuntergang rot.

## 24.1 Region der Anpassungsprozesse

Wir haben in der letzten Vorlesung 23 gesehen, dass die Struktur des elektromagnetischen Feldes ein Volumen der Größenordnung  $\lambda^3$  braucht, um sich von einer quasistatischen Feldstruktur zu einer dynamischen von den Ladungen und Strömen losgelösten dynamischen Feldstruktur umzuwandeln. Filligranere Strukturen als die Größenordnung  $\lambda^3(\omega)$  sind bei einer Frequenz  $\omega$  nicht möglich. Die Abstrahlleistung eines Dipols ist umso höher ( $\mathbf{S} \propto \omega^4$ ), je schneller der Dipol schwingt. Es erfolgt eine Umverteilung der elektromagnetischen Felder in Ort und Zeit: Das an die Ladungen gebundene elektrische Feld ist in den polaren Regionen konzentriert, und die Nahfeld magnetische Flussdichte in den Tropen. Beide Felder wechseln sich zeitlich ab und unterscheiden sich deutlich bezüglich der in ihnen gespeicherten Energiedichten. Im Fernfeld fallen die elektrischen Feldmaxima mit den magnetischen Feldmaxima sowohl im Ort als auch in der Zeit zusammen. Beide Felder haben im Fernfeld die gleiche Energiedichte. Wir haben also die folgenden Umordnungsprozesse

<b>Nahfeld</b>	→	<b>Fernfeld</b>
verschiedene Orte	→	gleiche Orte
verschiedene Zeiten	→	gleiche Zeiten
verschiedene Energiedichten	→	gleiche Energiedichten

Die verschiedenen Anpassungsprozesse und die Feldstruktur ist eine Folge der Verkoppelung von Ladungsdichte und Stromdichte über die Kontinuitätsgleichung, einer Nebenbedingung die wir automatisch durch Verwendung des Hertzschen Vektors erfüllt haben. Die Feldstruktur folgte dann durch Differentiation des Hertzschen Vektors. Wir wollen die Effekte dieser Nebenbedingung physikalisch besser verstehen und liefern deshalb ein paar globale Betrachtungen zur Feldstruktur nach:

## 24.2 Globale Überlegungen zum Hertzschen Dipolfeld

Wir integrieren die inhomogene Maxwellgleichung

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (24.1)$$

über eine konzentrische Kreisfläche um die Dipolachse mit Normalenvektor  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$  und erhalten

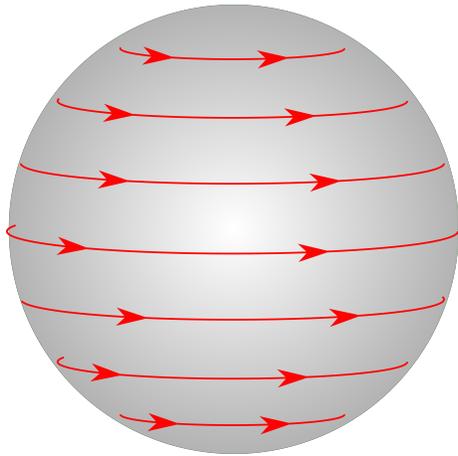
$$c^2 \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d^2 S \quad (24.2)$$

Wir suchen nach einer transversalen magnetischen Flussdichte (tangential zur Kugeloberfläche) und losgelöst vom im Dipol fließenden Strom  $I$ . Dies gelingt uns mit einem längs den Breitengraden verlaufenden magnetischen Flussdichteprofil, dass aber am Nord und Südpol der Kugelfläche zwei Wirbelzentren besitzt (Abbildung 24.1).

Jetzt müssen wir ein elektrische Feld finden für das gilt:

$$c^2 \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d^2 S \quad (24.3)$$

und das senkrecht auf die magnetische Flussdichte steht. Eine ebenfalls transversales Feld entlang der Längengrade (Abbildung 24.2) der Kugeloberfläche wäre senkrecht zum Flussdichtefeld, wäre aber nicht divergenzfrei, denn sämtliche Feldlinien dieses Feldes beginnen in einem Pol und enden



**Abbildung 24.1:** Magnetisches Wirbelfeld um die polare Achse

im anderen Pol der Kugeloberfläche. An den Polen sitzen aber keine Ladungen. Das elektrische Feld muss also eine Radialkomponente besitzen, senkrecht zur magnetischen Flussdichte verlaufen und die Feldlinien dürfen nicht aufhören und müssen deshalb eine geschlossene Kurve sein (Abbildung 24.3). Diese geschlossene Kurve muss in radiale Ausdehnung die Größenordnung  $\lambda/2$  haben, damit im Fernfeld eine transversalwellenähnliche Struktur des elektromagnetischen Feldes wie in einer ebenen Welle entsteht. Das Wirbelzentrum dieses elektrischen Feldwirbels muss aus Symmetriegründen in der Äquatorebene liegen. Sowohl auf der Kugelfläche durch das Wirbelzentrum als auch auf die Äquatorebene steht das elektrische Feld senkrecht. Wir betrachten ein toroidales Volumen, das durch eine Kugelfläche  $A_1 \sim r^2$  durch einen konzentrischen Ring der Breite von der Größenordnung der Wellenlänge in der Äquatorialebene  $A_2 \sim \lambda r$  und durch eine Fläche  $A_3$  gebildet von einer Schar elektrischer Feldlinien eines Feldwirbels begrenzt sind. Durch die Fläche  $A_3$  fließt kein elektrisches Feld und wir schließen aus dem Satz von Gauss, das gilt

$$0 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3\mathbf{r} = \int_{A_1 \cup A_2 \cup A_3} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d^2A = A_2 E_\vartheta - A_1 E_r \quad (24.4)$$

woraus wir schließen dass die Radialkomponente des elektrischen Feldes von der Größenordnung

$$E_r \sim \frac{\lambda}{r} E_\vartheta \quad (24.5)$$

ist und die Radialkomponente  $E_r$  deshalb mit dem Abstand stärker abnimmt als die transversale  $E_\vartheta$ -Komponente.

Die Radialkomponente  $S_r$  des Poyntingvektor  $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  wird durch die elektrische Feldkomponente  $E_\vartheta$  und die Flussdichtekomponente  $B_\varphi$  erzeugt. Für eine ebene transversale Welle gilt

$$E_\perp = c B_\perp, \quad (24.6)$$

und aufgrund des Energiesatzes muss  $S_r \sim \frac{1}{r^2}$  invers proportional zum Quadrat des Abstandes abnehmen, damit der Energiefluss durch eine konzentrische Kugelfläche unabhängig vom Abstand ist.

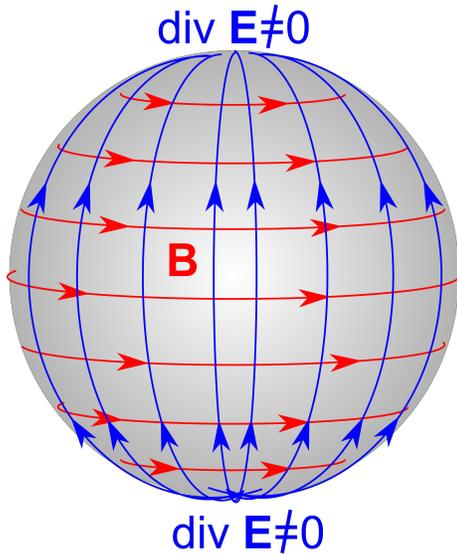


Abbildung 24.2: Ein elektrisches transversal Feld ist nicht divergenzfrei

Wir folgern daraus

$$E_{\vartheta} = cB_{\varphi} \propto \frac{1}{r} \quad (24.7)$$

$$E_r \propto \frac{\lambda}{r^2} \quad (24.8)$$

Die Form der elektrischen Wirbelfeldlinien sind also geschlossene Kurven der Dicke  $\sim \lambda/2$  und Länge  $\sim r$ . Die Form dieser Linien läßt sich nicht aufrechterhalten, wenn man zum Zentrum des Hertzischen Dipols wandert, denn das elektrische Feld muss irgendwann an den Ladungen des Dipols enden, der ja das gesamte elektromagnetische Feld erzeugt.

Die Frequenzabhängigkeit des Strahlungsfeld muss von der Form  $\mathbf{E}_{Strahl} \sim \omega^{\alpha}$  mit  $\alpha > 0$  sein. Eine Exponent  $\alpha = 0$  muss ausgeschlossen werden, weil wir bereits wissen, dass ein statisches Feld ( $\omega \rightarrow 0$ ) keine Energie abstrahlen kann.

Das quasistatische elektrische Feld  $\mathbf{E}_{qu.st.}$ , dessen Feldlinien an den Ladungen beginnen und enden muss unabhängig von  $\omega$  sein:

$$\mathbf{E}_{qu.st.} \sim \omega^0, \quad (24.9)$$

denn die Ladungen des Dipols sind unabhängig von  $\omega$ .

Wir entwickeln das elektrische Feld in einer Taylorentwicklung nach  $\omega$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{qu.st.}\omega^0 + \tilde{\mathbf{E}}_1\omega^1 + \tilde{\mathbf{E}}_2\omega^2 + \dots \quad (24.10)$$

Wegen  $\omega = kc = 2\pi c/\lambda$  und weil  $\lambda$  und  $r$  die einzigen vorkommenden Längen sind, übersetzt sich Gleichung 24.10 zu

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{qu.st.} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^0 + \mathbf{E}_1 \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{-1} + \mathbf{E}_2 \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{-2} + \dots \quad (24.11)$$



### 24.3 Die Farbe unseres Himmels, weiß und blau

Gott mit Dir Du Land der Bayern, deutsche Erde Vaterland!  
 Über Deinen weiten Gauen ruhe Seine Segenshand!  
 Er behüte deine Fluren, schirme deiner Städte Bau  
 und erhalte dir die Farben, Seines Himmels, weiß und blau.

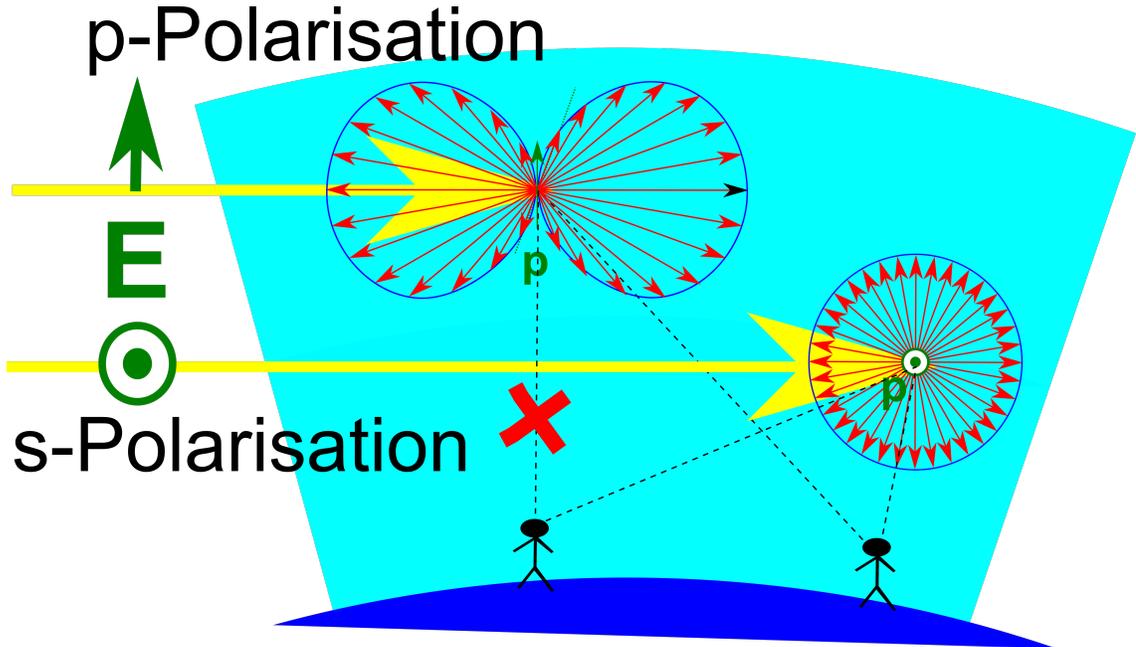


Abbildung 24.4: Ein Molekül im Himmel streut das Sonnenlicht

Wir versuchen hier zumindest eine der zwei Farben, (die die in der fränkischen Flagge nicht vorkommt) physikalisch zu erklären.

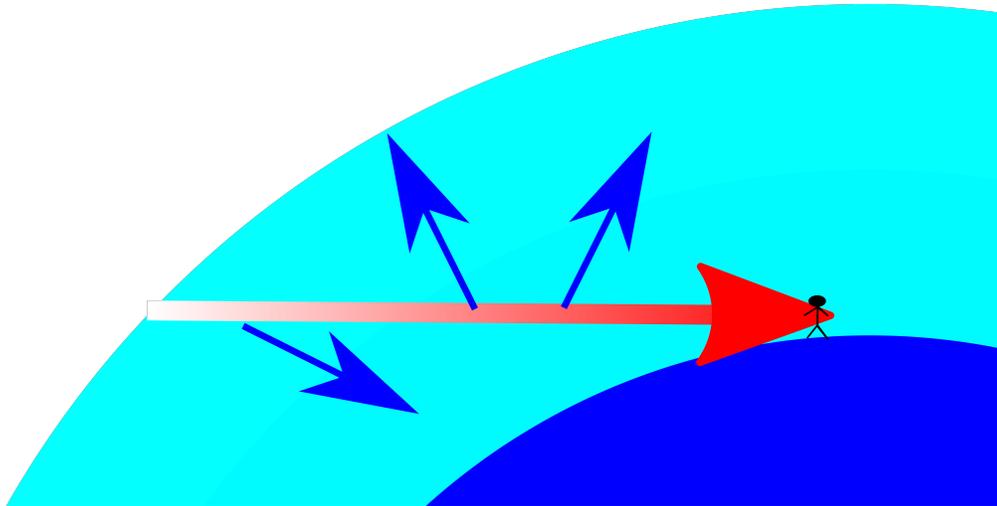
Unsere Sonne ist in guter Näherung ein schwarzer Strahler mit einem Planckspektrum welches sein Maximum im Grünen also im Sichtbaren Spektralbereich erreicht und die Intensität im Roten und Blauen noch nicht viel schwächer als im Grünen ist. Wir wollen also das auf die Erde fallende Sonnenlicht als weiß mit einem wellenlängenunabhängigen Poyntingvektor  $\mathbf{S}_{\text{Sonne}}(\text{rot}) \approx \mathbf{S}_{\text{Sonne}}(\text{blau})$  annähern. Das elektrische Feld des Sonnenlichts bringt die Elektronen der Luftmoleküle zum Schwingen. Weil die Moleküle kleiner als die Wellenlänge des Lichtes sind, fungieren diese als Hertzscher Dipol mit Dipolamplitude  $\mathbf{p}_{\text{Molekül}}(\omega) \propto \mathbf{E}_{\text{Sonne}}(\omega)$  die dem elektrischen Feld in der ankommenden Sonnenstrahlung proportional ist. Wir beobachten das Fernfeld der Moleküle dessen verschieden farbige Poyntingvektoren die Beziehung

$$\frac{|\mathbf{S}_{\text{Molekül, } r=8 \text{ km}}(\omega = \text{blau})|}{|\mathbf{S}_{\text{Molekül, } r=8 \text{ km}}(\omega = \text{rot})|} = \left(\frac{\omega_{\text{blau}}}{\omega_{\text{rot}}}\right)^4 \frac{|\mathbf{S}_{\text{Sonne}}(\omega = \text{blau})|}{|\mathbf{S}_{\text{Sonne}}(\omega = \text{rot})|} = \left(\frac{\omega_{\text{blau}}}{\omega_{\text{rot}}}\right)^4 \quad (24.16)$$

erfüllen. Es wird von den Molekülen mehr blaues als rotes Licht zu uns herunter auf den Boden gestreut weshalb der Himmel blau erscheint.

Der Beobachter, das streuende Molekül im Himmel, und die Sonne definieren die Einfallsebene. Sonnenlicht bei dem das elektrische Feld in dieser Ebene liegt bezeichnet man als  $p$ -polarisiert, Sonnenlicht, dessen elektrisches Feld senkrecht zur Einfallsebene schwingt als  $s$ -polarisiert. Das Hertzsche Dipolmoment des Moleküls von  $p$ -polarisiertem Sonnenlicht liegt in der Einfallsebene, das Hertzsche Dipolmoment des Moleküls von  $s$ -polarisiertem Sonnenlicht steht senkrecht zur Einfallsebene. Schauen wir senkrecht zu den einfallenden Sonnenstrahlen schauen wir in Richtung des  $p$ -polarisierten Dipolmoments, und damit in die Richtung in dem von diesem keine Hertzsche Dipolstrahlung ausgestrahlt wird. Der Himmel ist in diese Blickrichtung  $s$ -polarisiert. In andere Richtungen werden beide Polarisationsformen des Sonnenlichts in unsere Richtung gestreut und der Himmel erscheint unpolarisiert. Wenn Sie ein Fotograf mit Polarisationsfiltern sind, können Sie diesen Umstand bei schönem Wetter leicht überprüfen.

Die weiße Farbe unseres bayerischen Himmels läßt sich physikalisch ebenfalls mittels Mie-Streuung erklären. Wir vertrauen Sie hierzu aber auf die Vorlesung über Optik im nächsten Semester. Wir beschließen diese Vorlesung mit der fränkischen Farbe rot. Diese können Sie bei Sonnenaufgang und Sonnenuntergang beobachten wenn der Weg der Sonnenstrahlen durch die Atmosphäre wesentlich länger als  $8\text{km}$  ist und deshalb soviel blaues Licht aus dem Sonnenlicht in andere Richtungen heraus gestreut wird, dass lediglich das rote Sonnenlicht übrigbleibt. Im E-Learning haben wir die Himmelsfarbe und den Sonnenuntergang durch Streuung an einer kolloidalen Suspension auf Hörsaalgröße hinunter skaliert



**Abbildung 24.5:** Ein Sonnenuntergang erscheint rot, da blaues Licht aus dem Primärstrahl heraus gestreut wird.

## 24.4 Übungen

### 24.4.1 Quadrupolstrahlung

Zeigen Sie: Wenn das Paar  $\mathbf{Z}$  und  $\mathbf{P}$  die inhomogene Wellengleichung 23.35 erfüllen, dann auch das Paar  $\mathbf{Z}' = \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{r} \times \nabla)\mathbf{Z}$  und  $\mathbf{P}' = \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{r} \times \nabla)\mathbf{P}$ . Berechnen Sie das Elektromagnetische Feld zu  $\mathbf{Z}_Q = \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{r} \times \nabla)\mathbf{Z}_{\text{Hertzscher Dipol}}$ .

### 24.4.2 Experiment: Himmelspolarisation

Machen Sie ein Foto des blauen Himmels bei schönem Wetter. Benutzen Sie ein Weitwinkelobjektiv zusammen mit einem Polarisationsfilter. Decken Sie nötigenfalls die Sonne ab um Überbelichtung zu vermeiden. Erklären Sie, wie Ihr Bild aussieht und warum es so aussieht.

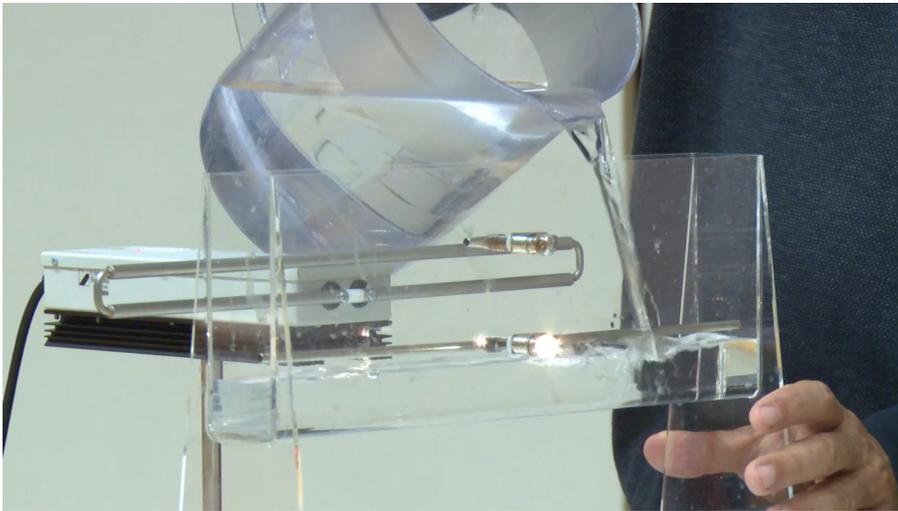
### 24.4.3 Programmierung: Ablöseprozeß

Die elektrischen Feldlinien des Hertzschen Dipols können als Höhenlinien des Ausdrucks

$$G = r \sin(\vartheta) \left( \frac{\cos(\omega t - kr)}{(kr)^2} - \frac{\sin(\omega t - kr)}{kr} \right) \quad (24.17)$$

geschrieben werden. Machen Sie einen Feldlinienplot der elektrischen Feldlinien in der  $xy$ -Ebene gegenüber der Zeit  $t$  mit den Feldlinien die durch die inneren elektrischen Knotenlinien des Hertzschen Dipols laufen. Plotten Sie zusätzlich den Schnitt der innersten elektrischen Separatrixfläche mit der  $xy$ -Ebene sowie den Schnitt der beiden innersten elektrischen Knotenlinien mit der  $xy$ -Ebene als Funktion der Zeit. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Bild vor Kapitel 23. Ist der Ablöseprozeß ein Ereignis im relativistischen Sinn?





## Kapitel 25

# Spannungstensor und optische Pinzette

In dieser Vorlesung führen wir den Spannungstensor des externen Feldes ein. Wir berechnen die Steighöhe einer dielektrischen Flüssigkeit in einem Kondensator bei horizontaler und vertikaler Anordnung. Wir berechnen die an einer dielektrischen Grenzfläche transmittierte und reflektierte Welle und stellen die Energie- und Impulsbilanz an der Grenzfläche auf. Die Energie des externen Feldes ist an der Grenzfläche erhalten. Die Grenzfläche nimmt aber Impuls auf, und wird in Richtung niedrigerem Brechungsindex gedrückt. Wir nutzen das aus, um flüssige Tropfen optisch zu strecken bzw. mit fokussierten Laserstrahlen zu fassen.

## 25.1 Spannungstensor im Dielektrikum

Wir teilen die Kraftdichte

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (25.1)$$

auf in eine externe Kraftdichte

$$\mathbf{f}_{ext} = \rho_{ext} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{ext} \times \mathbf{B} \quad (25.2)$$

und eine interne Kraftdichte

$$\mathbf{f}_{int} = \rho_{int} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{int} \times \mathbf{B}, \quad (25.3)$$

die an den externen Ladungen und Strömen

$$\rho_{ext} = \nabla \cdot \mathbf{D} \quad (25.4)$$

$$\mathbf{j}_{ext} = c^2 \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (25.5)$$

bzw. an den internen Ladungen und Strömen angreift. Beachten Sie, dass Ladungen und Ströme die physikalischen elektromagnetischen Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  spüren, da Sie nicht feststellen können, wie wir die künstliche Aufteilung in externe und interne Größen gemacht haben.

Wir wollen die externe Kraftdichte als Divergenz eines Spannungstensors

$$\mathbf{f}_{ext} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ext} \quad (25.6)$$

schreiben, was uns mit dem Spannungstensor des externen Feldes

$$\boldsymbol{\sigma}_{ext} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{H} + \mathbf{H} \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \mathbb{1} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \mathbb{1}) \quad (25.7)$$

auf gleiche Weise wie in Vorlesung 21 gelingt.

Der negative Spannungstensor  $-\boldsymbol{\sigma}_{ext}$  entspricht dem Impulsstrom des externen Feldes, der ungestört an den internen Ladungen und Strömen vorbeifließt. Wir erweitern den dreidimensionalen Spannungstensor zum Lorentzinvarianten Vierer Energie/Impuls-Dichte/Stromdichte-Tensor

$$\boldsymbol{\sigma}_4^{ext} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} & \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{E}}{c^2} & \boldsymbol{\sigma}_{ext} \end{pmatrix}, \quad (25.8)$$

und erkennen daran, dass die Energiedichte des externen Feldes

$$u_{ext} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (25.9)$$

beträgt, der externe Energiestrom der externen Energiedichte durch den externen Poyntingvektor

$$\mathbf{S}_{ext} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (25.10)$$

gegeben ist und der Impulsstrom der externen Impulsdichte durch

$$\mathbf{g}_{ext} = \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{c^2} \quad (25.11)$$

gegeben ist. Wir betrachten nochmals eine dielektrische Flüssigkeit, welche halb in einen Kondensator eingetaucht ist. In der Flüssigkeit herrscht in Folge der Gravitation in der Tiefe  $z < z_{grenz}$

der Flüssigkeit hydrodynamische Druck  $p_{hydr} = \rho_m^{fl, Luft} g(z_{grenz} - z)$ , wobei  $z_{grenz}$  die Lage der Flüssigkeitsoberfläche zur Luft bezeichnet und  $\rho_m^{fl, Luft}$  die Massendichte der Flüssigkeit (der Luft) bezeichnet. Der mechanische Spannungstensor beträgt deshalb

$$\boldsymbol{\sigma}_{mech} = -p_{hydr} \mathbb{1} = -\rho_m^{fl, Luft} g(z_{grenz} - z) \mathbb{1} \quad (25.12)$$

Im mechanischen Gleichgewicht gilt

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{ext} + \boldsymbol{\sigma}_{mech}) = 0 \quad (25.13)$$

und deshalb an der Grenzfläche zwischen der Flüssigkeit und der Luft

$$\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{ext}^{Luft} + \boldsymbol{\sigma}_{mech}^{Luft} - \boldsymbol{\sigma}_{ext}^{fl} - \boldsymbol{\sigma}_{mech}^{fl}) = 0 \quad (25.14)$$

Wenn das elektrische Feld des Kondensators horizontal verläuft wie in Abbildung 25.1 ist  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$  und  $\mathbf{E}$  stetig und wir erhalten die beiden Gleichungen

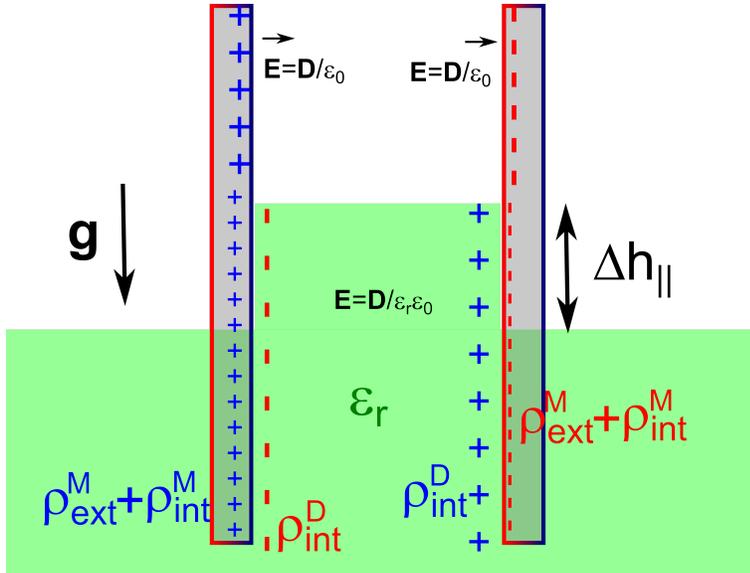


Abbildung 25.1: Eine dielektrische Flüssigkeit in einem Kondensator (horizontale Anordnung)

$$-\frac{1}{2} \mathbf{n} (\epsilon_{Luft} - \epsilon_{fl}) E^2 - (\rho_m^{Luft} - \rho_m^{fl}) g (z_{grenz}^{E \neq 0} - z) \mathbf{n} = 0 \quad (25.15)$$

$$-(\rho_m^{Luft} - \rho_m^{fl}) g (z_{grenz}^{E=0} - z) \mathbf{n} = 0 \quad (25.16)$$

und durch Subtraktion beider Gleichungen und Benutzung von  $U = E/d$  finden wir den Höhenunterschied  $\Delta h_{\parallel}$  der Flüssigkeitsoberfläche im und außerhalb des Kondensators.

$$\Delta h_{\parallel} = (z_{grenz}^{E \neq 0} - z_{grenz}^{E=0}) = \frac{(\epsilon_{fl} - \epsilon_{Luft}) U^2}{2(\rho_m^{fl} - \rho_m^{Luft}) g d^2} \quad (25.17)$$

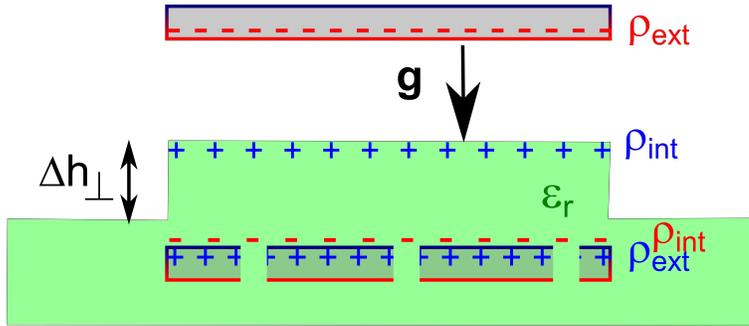


Abbildung 25.2: Eine dielektrische Flüssigkeit in einem Kondensator (vertikale Anordnung)

Verläuft das elektrische Feld senkrecht zur Flüssigkeitsoberfläche wie in Abbildung 25.2 ist  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = D^2 \mathbf{n}$  stetig und wir finden

$$\frac{1}{2} \mathbf{n} D^2 \left( \frac{1}{\epsilon_{Luft}} - \frac{1}{\epsilon_{fl}} \right) - (\rho_m^{Luft} - \rho_m^{fl}) g (z_{grenz}^{E \neq 0} - z) \mathbf{n} = 0 \quad (25.18)$$

$$-(\rho_m^{Luft} - \rho_m^{fl}) g (z_{grenz}^{E=0} - z) \mathbf{n} = 0 \quad (25.19)$$

und durch Subtraktion beider Gleichungen und Benutzung der externen Oberflächenladungsdichte  $\sigma_{ext} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$  (die Sie bitte nicht mit dem Spannungstensor  $\sigma_{ext}$  verwechseln) finden wir den Höhenunterschied  $\Delta h_{\perp}$  der Flüssigkeitsoberfläche im und außerhalb des Kondensators.

$$\Delta h_{\perp} = (z_{grenz}^{E \neq 0} - z_{grenz}^{E=0}) = \frac{\left( \frac{1}{\epsilon_{Luft}} - \frac{1}{\epsilon_{fl}} \right) \sigma_{ext}^2}{2(\rho_m^{fl} - \rho_m^{Luft})g} \quad (25.20)$$

Wir sehen, dass die beiden Höhenunterschiede  $\Delta h_{\parallel}$  und  $\Delta h_{\perp}$  verschieden sind weil der Spannungstensor des externen Feldes anisotrop ist.

## 25.2 Elektromagnetische Wellen im Dielektrikum

In Vorlesung 19 hatten wir in Zusammenhang mit den dynamischen Eigenschaften eines Metalls die Wellengleichung

$$\begin{pmatrix} \omega^2 \epsilon(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 \epsilon(\omega) - k^2 c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \epsilon(\omega) - k^2 c^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (25.21)$$

einer in  $x$ -Richtung propagierenden Welle hergeleitet, die natürlich auch für eine andere dielektrische Funktion  $\epsilon(\omega)$  als die eines Metalls richtig ist.

Für transversale Wellen finden wir die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\epsilon} \quad (25.22)$$

bzw.

$$\omega = \frac{kc}{\sqrt{\epsilon}} \quad (25.23)$$

oder auch

$$\omega = \frac{kc}{n} \quad (25.24)$$

mit dem Brechungsindex

$$n = \sqrt{\epsilon} \quad (25.25)$$

Die Wellenlänge der Welle beträgt

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{n\omega}, \quad (25.26)$$

so dass bei fester Kreisfrequenz  $\omega$  die Wellenlänge im Dielektrikum

$$\lambda_{\text{Dielektrikum}} = \frac{\lambda_{\text{Vakuum}}}{n} \quad (25.27)$$

gegenüber derselben Welle im Vakuum um den Faktor  $1/n$  verkürzt ist. Im E-Learning zeigen wir dies anhand einer Dezimeterwelle mit zwei  $\lambda/2$ -Antennen, die sich in Ihrer Länge um den Faktor  $n = 5$  unterscheiden. Die eine Antenne empfängt im Vakuum, die andere in Wasser. Sie erkennen daran auch, dass auch in einem Dielektrikum, wie Wasser, die dielektrische Funktion von der Frequenz abhängt. Der Wert der statischen Dielektrizitätskonstante von Wasser ist  $\epsilon_{H_2O}(\omega = 0) = 80 \neq \epsilon_{H_2O}(\omega = 2\pi GHz) = n_{H_2O}^2(\omega = 2\pi GHz) = 25$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der dispersionfreien Welle ist

$$\nabla_{\mathbf{k}}\omega = \mathbf{v}_{gr} = \mathbf{v}_{ph} = \frac{\omega}{k^2}\mathbf{k} = \frac{\mathbf{c}}{n} \quad (25.28)$$

Das Amplitudenverhältnis zwischen magnetischer Flussdichte und elektrischem Feld in der Welle beträgt

$$\frac{\hat{B}}{\hat{E}} = \frac{n}{c} \quad (25.29)$$

## 25.3 Reflexion an einer dielektrischen Grenzfläche

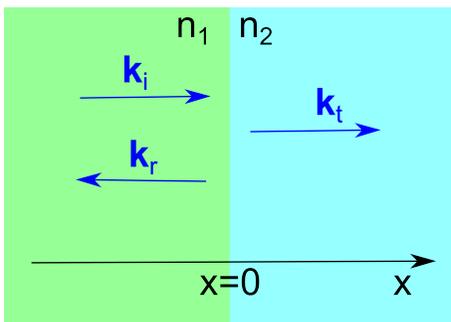


Abbildung 25.3: Wellenvektoren bei Reflexion und Transmission einer elektromagnetischen Welle

Wir lassen eine ebene Welle in  $x$ -Richtung senkrecht auf eine Grenzfläche bei  $x = 0$  zwischen zwei Dielektrika mit Brechungsindex  $n_1$  und  $n_2$  einfallen (Abbildung 25.3) und setzen eine einlaufende und reflektierte Welle im Dielektrikum 1, sowie eine transmittierte Welle im Dielektrikum 2 an:

$$\mathbf{E}_1 = \hat{E}_i \mathbf{e}_y \cos(k_1 x - \omega t) + \hat{E}_r \mathbf{e}_y \cos(-k_1 x - \omega t) \quad (25.30)$$

$$\mathbf{E}_2 = \hat{E}_t \mathbf{e}_y \cos(k_2 x - \omega t) \quad (25.31)$$

mit

$$k_{1,2} = n_{1,2} \frac{\omega}{c} \quad (25.32)$$

und der zugehörigen magnetischen Flussdichte

$$\mathbf{B}_1 = \frac{k_1 \mathbf{e}_x}{\omega} \times \hat{E}_i \mathbf{e}_y \cos(k_1 x - \omega t) + \frac{-k_1 \mathbf{e}_x}{\omega} \times \hat{E}_r \mathbf{e}_y \cos(-k_1 x - \omega t) \quad (25.33)$$

$$= \frac{k_1}{\omega} \hat{E}_i \mathbf{e}_z \cos(k_1 x - \omega t) - \frac{k_1}{\omega} \hat{E}_r \mathbf{e}_z \cos(-k_1 x - \omega t) \quad (25.34)$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{k_1}{\omega} \hat{E}_t \mathbf{e}_z \cos(k_2 x - \omega t). \quad (25.35)$$

Das elektrische Feld zeigt in  $y$ -Richtung, also parallel zur Grenzfläche und ist deshalb an der Stelle  $x = 0$  stetig und wir folgern daraus

$$\hat{E}_i + \hat{E}_r = \hat{E}_t. \quad (25.36)$$

Die magnetische Flussdichte ist bei  $x = 0$  stetig, da unser Material unmagnetisch ist. Wir finden

$$\hat{E}_i \frac{k_1}{\omega} - \hat{E}_r \frac{k_1}{\omega} = \hat{E}_t \frac{k_2}{\omega}. \quad (25.37)$$

Wir lösen die Gleichungen 25.37 und 25.36 nach den transmittierten und reflektierten elektrischen Feldamplituden auf

$$\hat{E}_t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \hat{E}_i \quad (25.38)$$

$$\hat{E}_r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \hat{E}_i \quad (25.39)$$

$$(25.40)$$

und berechnen die Poyntingvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1 &= \mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_x \epsilon_0 c^2 [\hat{E}_i \cos(k_1 x - \omega t) + \hat{E}_r \cos(-k_1 x - \omega t)] \left[ \frac{k_1}{\omega} \hat{E}_i \cos(k_1 x - \omega t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_1}{\omega} \hat{E}_r \cos(-k_1 x - \omega t) \right] \end{aligned} \quad (25.41)$$

$$= \mathbf{e}_x \epsilon_0 c^2 \frac{k_1}{\omega} [\hat{E}_i^2 \cos^2(k_1 x - \omega t) - \hat{E}_r^2 \cos^2(-k_1 x - \omega t)] \quad (25.42)$$

$$= \mathbf{S}_1^i + \mathbf{S}_1^r \quad (25.43)$$

der einfallende Poyntingvektor ist

$$\mathbf{S}_1^i = \underbrace{\epsilon_0 \epsilon_1 \mathbf{E}_i^2}_{\text{Energiedichte des elektrischen und magnetischen Feldes}} \underbrace{\frac{c \mathbf{e}_x}{n_1}}_{\text{Gruppengeschwindigkeit}} \quad (25.44)$$

Die Impulsdichte der einfallenden Welle finden wir gemäß

$$\mathbf{g}_1^i = \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{c^2} \quad (25.45)$$

$$= \frac{\epsilon_1}{c} \mathbf{S}_1^i \quad (25.46)$$

$$= \frac{n_1^2}{c} \mathbf{S}_1^i \quad (25.47)$$

Wir finden den Reflexionskoeffizienten

$$r = \frac{|\mathbf{S}_1^r|}{|\mathbf{S}_1^i|} = \frac{\hat{E}_r^2}{\hat{E}_i^2} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \quad (25.48)$$

und den Transmissionskoeffizienten

$$t = \frac{|\mathbf{S}_2^t|}{|\mathbf{S}_1^i|} = \frac{n_2 \hat{E}_t^2}{n_1 \hat{E}_i^2} = \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (25.49)$$

Wir sehen, dass

$$r + t = 1 \quad (25.50)$$

gilt und die Energie bei der Reflexion und Transmission erhalten ist.

Wir berechnen die  $xx$ -Komponenten der Spannungstensoren auf beiden Seiten der Grenzfläche

$$\sigma_{xx,1}(x=-0) = -\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (25.51)$$

$$= -\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_1 E_1^2 - \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 B_1^2 \quad (25.52)$$

$$= -\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_1 (\hat{E}_i + \hat{E}_r)^2 - \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \left( \hat{E}_i \frac{k_1}{\omega} - \hat{E}_r \frac{k_1}{\omega} \right)^2 \quad (25.53)$$

$$= -\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_1 (\hat{E}_i + \hat{E}_r)^2 - \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \frac{\epsilon_1}{c^2} (\hat{E}_i - \hat{E}_r)^2 \quad (25.54)$$

$$= -\epsilon_0 \epsilon_1 (\hat{E}_i^2 + \hat{E}_r^2) \quad (25.55)$$

$$\sigma_{xx,2}(x=+0) = -\epsilon_0 \epsilon_2 \hat{E}_i^2 \quad (25.56)$$

die Oberflächenkraftdichte auf die Grenzfläche ist

$$\frac{\mathbf{F}}{A}(x=0) = (\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1) \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x (\sigma_{xx,2} - \sigma_{xx,1}) \quad (25.57)$$

$$= \mathbf{e}_x \epsilon_0 \left[ -\epsilon_2 \hat{E}_i^2 + \epsilon_1 \hat{E}_i^2 + \epsilon_1 \hat{E}_r^2 \right] \quad (25.58)$$

$$= \mathbf{e}_x \epsilon_0 \hat{E}_i^2 \left[ -n_2^2 \left( \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 + n_1^2 + n_1^2 \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \right] \quad (25.59)$$

$$= \mathbf{e}_x \epsilon_0 n_1^2 \hat{E}_i^2 \frac{-4n_2^2 + (n_1 + n_2)^2 + (n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (25.60)$$

$$= \mathbf{e}_x \epsilon_0 n_1^2 \hat{E}_i^2 \frac{2(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2} \quad (25.61)$$

Auf der Grenzfläche lastet ein Druckunterschied

$$p_{\text{Grenzfläche}} = \epsilon_0 n_1^2 \hat{E}_i^2 \frac{2(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2} \quad (25.62)$$

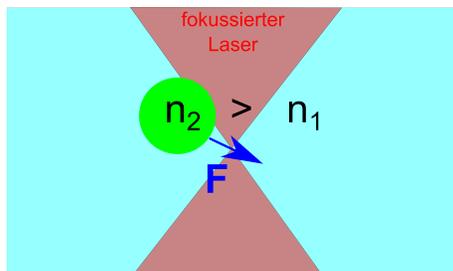
$$= \underbrace{|\mathbf{g}_1^i|}_{\substack{\text{Impulsdichte} \\ \text{der einfallenden} \\ \text{Welle}}} \underbrace{\left| \frac{c}{n_1} \mathbf{e}_x \right|}_{\substack{\text{Gruppen-} \\ \text{geschwindigkeit}}} \underbrace{\frac{2(n_1 - n_2)}{n_1 + n_2}}_{\substack{\text{Impuls-} \\ \text{absorptionskoeffizient} \\ \text{der Grenzfläche}}}, \quad (25.63)$$

der Impuls des Feldes ist also nicht erhalten und die Grenzfläche spürt eine Kraft in Richtung niedrigerem Brechungsindex.



**Abbildung 25.4:** Ein Tropfen mit Brechungsindex  $n_2 > n_1$  in einer Flüssigkeit mit Brechungsindex  $n_1$  wird durch einen Laserstrahl gestreckt.

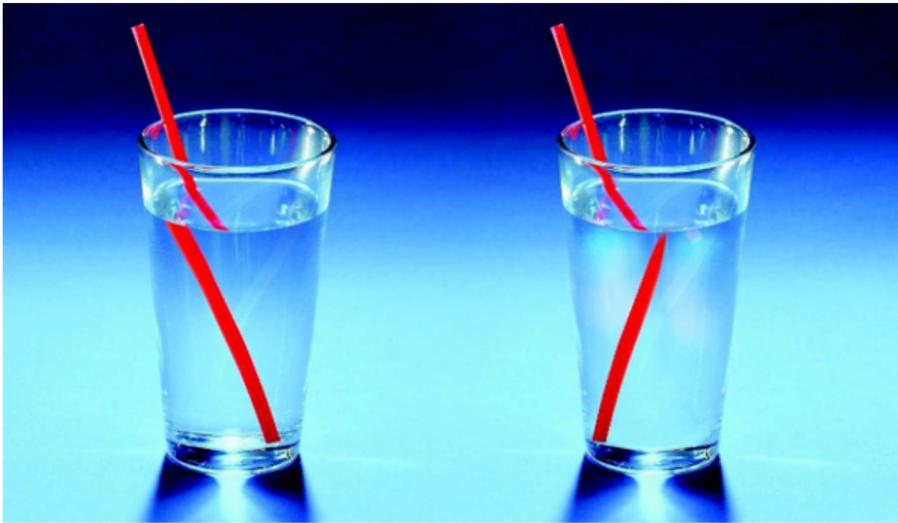
Wird ein Tropfen einer Flüssigkeit höheren Brechungsindex in einer Flüssigkeit niedrigeren Brechungsindex dispergiert und einem Laserstrahl ausgesetzt (Abbildung 25.4), so wird der Tropfen durch den Strahlungsdruck in der Laserstrahlachse gestreckt.



**Abbildung 25.5:** Ein Tropfen mit Brechungsindex  $n_2 > n_1$  wird in den Brennpunkt eines fokussierten Laserstrahls gezogen.

Verwendet man anstatt des Laserstrahls einen fokussierten Laserstrahl dessen Intensität vom Fokus weg abnimmt (Abbildung 25.5), so wird der Tropfen durch die Kraftunterschiede auf beiden Seiten des Tropfens in den Fokus gezogen. Man kann mit solch einer optischen Pinzette Mikrometer große Objekte höheren Brechungsindices als die Umgebung mit Licht anfassen. Solange der Brechungsindex

Wenn das Objekt keinen Imaginärteil besitzt, wird auf das Objekt keine Energie, sondern nur Impuls übertragen.



## Kapitel 26

# Metamaterialien

In dieser Vorlesung betrachten wir ebene elektromagnetische Wellen in linear dielektrischen und linear magnetischen Materialien. Ein Metamaterial ist ein Material mit negativer Dielektrizitätskonstante und negativer relativer magnetischer Permeabilität. Wir besprechen die Transmission und Reflexion an einem Metamaterial und sperren Licht ein.

## 26.1 Elektromagnetische Wellen in dielektrischen und magnetischen Materialien

Wir benutzen die Maxwellgleichungen für linear antwortende Systeme ohne externe Ladungen und Ströme

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (26.1)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} \quad (26.2)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (26.3)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (26.4)$$

$$\mathbf{H} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (26.5)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{P}/\epsilon_0 + \mathbf{D}/\epsilon_0 \quad (26.6)$$

mit den konstituierenden Gleichungen

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (26.7)$$

$$\epsilon_0 c^2 \mathbf{B} = (1 + \chi) \mathbf{H} = \mu_r \mathbf{H} \quad (26.8)$$

mit der relativen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r$  und der relativen Permeabilität  $\mu_r = (1 + \chi)$ . Wenn wir die externen Ladungen und Ströme generierenden Felder  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$  zu Gunsten der physikalischen Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  mit Hilfe der konstituierenden Gleichungen 26.7 substituieren erhalten wir:

$$\epsilon_r(\omega) \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (26.9)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\omega \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \mathbf{E} \quad (26.10)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (26.11)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (26.12)$$

Wir kombinieren Gleichung 26.10 mit Gleichung 26.11 zu

$$c^2 \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\omega^2 \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \mathbf{E} \quad (26.13)$$

$$[c^2 \mathbf{k} \mathbf{k} - k^2 c^2 \mathbb{1} + \omega^2 \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) \mathbb{1}] \cdot \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (26.14)$$

und finden, dass transversale Wellen bei denen das elektrische Feld senkrecht auf dem Wellenvektor steht ( $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ ) und die der Dispersionsrelation

$$(\omega^2 \epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) - k^2 c^2) = 0 \quad (26.15)$$

bzw.

$$\pm \omega \sqrt{\epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)} = kc \quad (26.16)$$

genügen die Maxwellgleichungen lösen, und dass für

$$\epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega) > 0 \quad (26.17)$$

tatsächlich ebene Wellen mit reellem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  vorliegen. Wir unterscheiden konventionelle Materialien mit positiver relativen Dielektrizitätskonstante und Permeabilität

$$\epsilon_r(\omega) > 0, \mu_r(\omega) > 0 \quad \text{konventionelle Materialien} \quad (26.18)$$

von Metamaterialen mit negativer relativen Dielektrizitätskonstante und Permeabilität

$$\epsilon_r(\omega) < 0, \mu_r(\omega) < 0 \quad \text{Metamaterialien.} \quad (26.19)$$

Wir legen den Wellenvektor in  $x$ -Richtung, das elektrische Feld in  $y$ -Richtung und berechnen die elektromagnetischen Felder

$$\mathbf{E} = \hat{E} \mathbf{e}_y \cos(\omega t - k_x x) \quad (26.20)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \hat{E} \mathbf{e}_y \cos(\omega t - k_x x) \quad (26.21)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \mathbf{E} \quad (26.22)$$

$$= \hat{E} \frac{k}{\omega} \mathbf{e}_z \cos(\omega t - k_x x) \quad (26.23)$$

$$\mathbf{H} = \frac{\epsilon_0 c^2}{\mu_r} \mathbf{B} = \hat{E} \frac{\epsilon_0 c^2}{\mu_r} \frac{k}{\omega} \mathbf{e}_z \cos(\omega t - k_x x), \quad (26.24)$$

den Poyntingvektor des externen Feldes

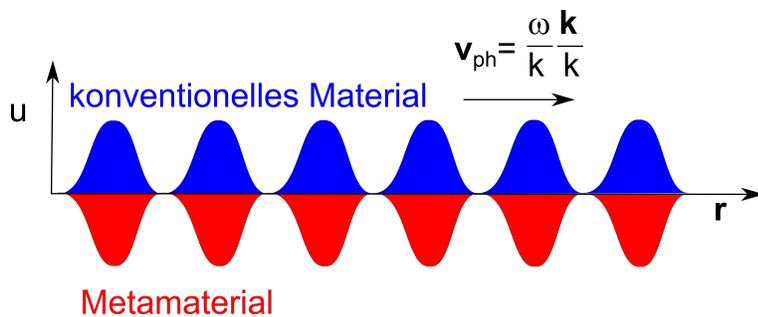
$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \hat{E}^2 \frac{\epsilon_0 c^2}{\mu_r} \frac{k}{\omega} \mathbf{e}_x \cos^2(\omega t - k_x x) \quad (26.25)$$

sowie die externe Feldenergiedichte

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \quad (26.26)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \hat{E}^2 \cos^2(\omega t - k_x x) + \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 c^2}{\mu_r} \frac{k^2}{\omega^2} \hat{E}^2 \cos^2(\omega t - k_x x) \quad (26.27)$$

$$= \epsilon_0 \epsilon_r \hat{E}^2 \cos^2(\omega t - k_x x) \quad (26.28)$$



**Abbildung 26.1:** Eine ebene Welle transportiert in einem konventionellen Material positive Energie in den Feldbäuchen aber in einem Metamaterial negative externe Feldenergie

Für konventionelle Materialien ist die Energiedichte in den elektrischen Feldbäuchen und magnetischen Flussdichtebäuchen positiv. In Metamaterialien ist die Energiedichte des externen Feldes

in den Feldebächen negativ (Abbildung 26.1). In konventionellen Materialien ist der Energiefluß  $\mathbf{S} = u \mathbf{v}_{ph} \uparrow \uparrow \mathbf{v}_{ph}$  entlang der Phasengeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{ph} = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad (26.29)$$

in Metamaterialien ist der Energiefluß  $\mathbf{S} = u \mathbf{v}_{ph} \uparrow \downarrow \mathbf{v}_{ph}$  entgegen der Phasengeschwindigkeit. Bewegen sich die die Wellenberge im Metamaterial nach rechts so fließt die Energie nach links. Die Impulsdichte im Metamaterial beträgt

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{c^2} = \frac{\epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)}{c^2} \mathbf{S} = \frac{k^2}{\omega^2} \mathbf{S} = \frac{\mathbf{S}}{v_{ph}^2} \quad (26.30)$$

und somit zeigt der Impuls des externen Feldes entgegen der Phasengeschwindigkeit. Schließlich berechnen wir die Impulsstromdichte  $-\boldsymbol{\sigma}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} (\mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathbf{D} - \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \mathbb{1} + \mathbf{H}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \mathbb{1}) \quad (26.31)$$

$$= \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \mathbb{1} + \frac{\epsilon_0 c^2}{\mu_r} \mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 c^2}{\mu_r} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \mathbb{1} \quad (26.32)$$

$$= \epsilon_0 \epsilon_r \hat{E}^2 \cos^2(\omega t - k_x x) \left[ \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) \right] + \frac{\epsilon_0 c^2}{\mu_r} \frac{k^2}{\omega^2} \hat{E}^2 \cos^2(\omega t - k_x x) \left[ \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) \right] \quad (26.33)$$

$$\stackrel{\omega^2 \epsilon_r \mu_r = k^2 c^2}{=} \epsilon_0 \epsilon_r \hat{E}^2 \cos^2(\omega t - k_x x) [\mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z)] \quad (26.34)$$

$$= -u \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x = -u \frac{\mathbf{v}_{ph} \mathbf{v}_{ph}}{v_{ph}^2} = -\frac{\mathbf{S}}{v_{ph}^2} \mathbf{v}_{ph} = -\mathbf{g} \mathbf{v}_{ph} \quad (26.35)$$

Die Impulsdichte beträgt also

$$\mathbf{g} = \frac{u}{v_{ph}^2} \mathbf{v}_{ph} \quad (26.36)$$

und die Impulsstromdichte beträgt

$$-\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{g} \mathbf{v}_{ph} \quad (26.37)$$

Der Impuls strömt mit der Phasengeschwindigkeit.

## 26.2 Reflexionskoeffizient zwischen konventionellen und Metamaterialien

Wir betrachten ein konventionelles Material der relativen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_1$  und relativen Permeabilität  $\mu_1$ , das bei  $z = 0$  an ein Metamaterial der relativen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_2$  und relativen Permeabilität  $\mu_2$  grenzt. Wir betrachten die Reflexion einer aus einem konventionellen Material unter dem Winkel  $\vartheta_i$  zur Normalen auf ein Metamaterial einfallenden ebenen Welle

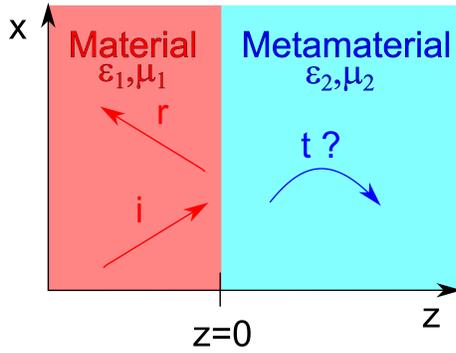


Abbildung 26.2: Eine ebene Welle trifft auf ein Metamaterial

(Abbildung 26.2) und setzen die initiale, die reflektierte und transmittierte Wellen mit

$$\mathbf{E}_i \propto e^{i(\omega^i t - k_x^i x - k_z^i z)} \quad (26.38)$$

$$\mathbf{E}_r \propto e^{i(\omega^r t - k_x^r x - k_z^r z)} \quad (26.39)$$

$$\mathbf{E}_t \propto e^{i(\omega^t t - k_x^t x - k_z^t z)} \quad (26.40)$$

den jeweiligen Frequenzen und Wellenvektorkomponenten an. Die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche gelten für alle Zeiten, weshalb die Kreisfrequenzen aller drei Wellen übereinstimmen müssen:

$$\omega^i = \omega^r = \omega^t. \quad (26.41)$$

Die Stetigkeitsbedingungen gelten für alle Positionen auf der Grenzfläche weshalb auch die Parallelkomponenten der Wellenvektoren übereinstimmen müssen:

$$k_x^i = k_x^r = k_x^t. \quad (26.42)$$

Gleichung 26.42 können wir auch mit den Phasengeschwindigkeiten ausdrücken:

$$v_{ph,x}^i = v_{ph,x}^r = v_{ph,x}^t. \quad (26.43)$$

Die initiale Welle entstammt einer Energiequelle im konventionellen Material und transportiert Energie auf die Grenzfläche zu. Wir lassen keine weitere Energiequelle zu, und die beiden anderen Wellen müssen die Energie wieder von der Grenzfläche weg transportieren. Es gilt also:

$$S_z^i > 0 \quad (26.44)$$

$$S_z^r < 0 \quad (26.45)$$

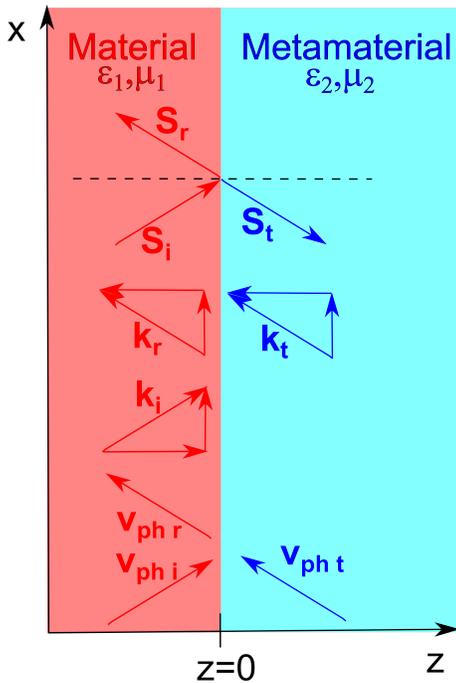
$$S_z^t > 0 \quad (26.46)$$

und es folgt, dass die Normalkomponenten des Wellenvektors die Bedingungen

$$k_z^i > 0 \quad (26.47)$$

$$k_z^r < 0 \quad (26.48)$$

$$k_z^t < 0 \quad (26.49)$$



**Abbildung 26.3:** Poyntingvektoren, Wellenvektoren und Phasengeschwindigkeiten der initialen, reflektierten und transmittierten Welle

bzw. die Phasengeschwindigkeitskomponenten

$$v_{ph,z}^i > 0 \quad (26.50)$$

$$v_{ph,z}^r < 0 \quad (26.51)$$

$$v_{ph,z}^t < 0 \quad (26.52)$$

erfüllen müssen. Damit läuft die transmittierte Welle auf die Grenzfläche zu, nicht von ihr weg (Abb. 26.3), und sie wird bei der Transmission auf die gleiche Seite des Lotes gebrochen wie die initiale Welle. Wir wollen die Reflexionsamplitude und den Reflexionskoeffizienten am Metamaterial für eine  $p$ -polarisierte Welle als Funktion des Einfallswinkels berechnen:

### 26.3 Reflexion am Metamaterial für $p$ -Polarisation

Der Einheitsvektor in Richtung des elektrischen Feldes  $\mathbf{e}_E$ , der Einheitsvektor in Richtung des magnetischen Feldes  $\mathbf{e}_H$  und Der Einheitsvektor in Richtung des Poyntingvektors  $\mathbf{e}_S$  bilden wegen  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  ein orthonormales Rechtssystem. Wir setzen diese Einheitsvektoren als

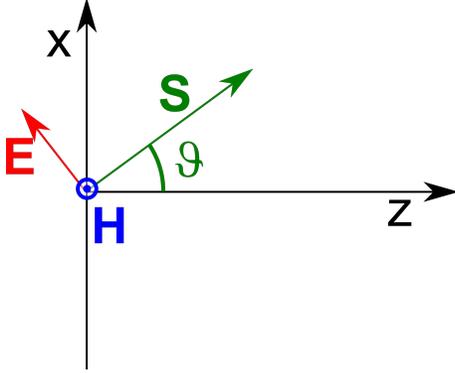


Abbildung 26.4: elektrisches Feld, magnetisches Feld, Poyntingvektor und der Winkel  $\vartheta$  zwischen  $\mathbf{e}_z$  und  $\mathbf{e}_S$

$$\mathbf{e}_E = \cos \vartheta \mathbf{e}_x - \sin \vartheta \mathbf{e}_z \quad (26.53)$$

$$\mathbf{e}_H = \mathbf{e}_y \quad (26.54)$$

$$\mathbf{e}_S = \sin \vartheta \mathbf{e}_x + \cos \vartheta \mathbf{e}_z \quad (26.55)$$

an, so dass die Welle  $p$ -polarisiert ist (Abbildung 26.4), das heißt, dass das elektrische Feld in der Einfallsebene (der  $xz$ -Ebene) liegt, und der Winkel  $\vartheta$  den Winkel zwischen  $\mathbf{e}_z$  und dem Poyntingvektor bezeichnet. Der Wellenvektor der Welle ist dann durch

$$\mathbf{k} = k \operatorname{sign}(\epsilon_{rel}) \mathbf{e}_S \quad (26.56)$$

mit

$$k = \sqrt{\epsilon_{rel} \mu_{rel}} \frac{\omega}{c} \quad (26.57)$$

gegeben. Aus Gleichung 26.42 folgt

$$k_1 \operatorname{sign}(\epsilon_1) \sin \vartheta_i = k_1 \operatorname{sign}(\epsilon_1) \sin \vartheta_r = k_2 \operatorname{sign}(\epsilon_2) \sin \vartheta_t \quad (26.58)$$

und es folgt das Reflexionsgesetz (Abbildung 26.5)

$$\vartheta_r = \pi - \vartheta_i \quad (26.59)$$

und das Brechungsgesetz von Snellius

$$\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \operatorname{sign}(\epsilon_1) \sin \vartheta_i = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \operatorname{sign}(\epsilon_2) \sin \vartheta_t. \quad (26.60)$$

Wir definieren den Brechungsindex

$$n = \sqrt{\epsilon_{rel} \mu_{rel}} \operatorname{sign}(\epsilon_{rel}), \quad (26.61)$$

so dass der Brechungsindex  $n_1 > 0$  eines konventionellen Materials positiv und der eines Metamaterials  $n_2 < 0$  negativ ist. Damit behält das Brechungsgesetz von Snellius seine übliche Form

$$n_1 \sin \vartheta_i = n_2 \sin \vartheta_t. \quad (26.62)$$

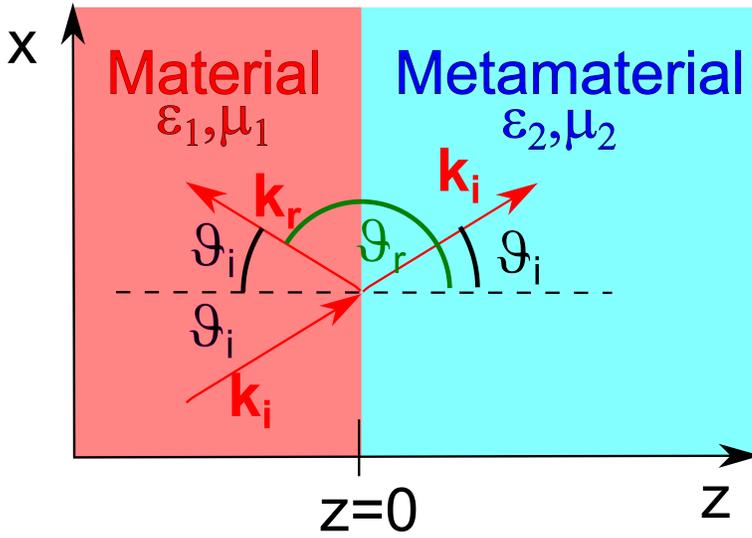


Abbildung 26.5: Einfallswinkel von  $\mathbf{k}_i$  und Ausfallswinkel von  $\mathbf{k}_r$  gemessen gegen  $\mathbf{e}_z$

Wir wenden uns jetzt den Stetigkeitsbedingungen der elektromagnetischen Felder zu: Die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte verschwindet für alle Wellen  $B_z = 0$  und ist damit stetig. Die Parallelkomponente des magnetischen Feldes ist stetig wenn

$$H_i + H_r = H_t \quad (26.63)$$

gilt. Aus dem Faradayschen Durchflutungsgesetz finden wir

$$-\omega\epsilon_0\epsilon_{rel}\mathbf{E} = \mathbf{k} \times \mathbf{H} \quad (26.64)$$

bzw.

$$\mathbf{E} = -\frac{\text{sign}(\epsilon_{rel})\mathbf{k} \times \mathbf{H}}{\omega\epsilon_0|\epsilon_{rel}|} \quad (26.65)$$

$$= -\mathbf{e}_S \times \mathbf{e}_H \frac{Hk}{\omega\epsilon_0|\epsilon_{rel}|} \quad (26.66)$$

$$= \frac{\sqrt{\epsilon_{rel}\mu_{rel}}}{c} \frac{H}{\epsilon_0|\epsilon_{rel}|} \mathbf{e}_E \quad (26.67)$$

Die Normalkomponente von  $\mathbf{D}$  muss stetig sein. Für eine ebene Welle finden wir

$$D_z = \epsilon_{rel}E_z = \frac{\text{sign}(\epsilon_{rel})\sqrt{\epsilon_{rel}\mu_{rel}}}{c} \frac{H}{\epsilon_0} (-\sin\vartheta) \quad (26.68)$$

$$= -\frac{nH}{\epsilon_0 c} \sin\vartheta \quad (26.69)$$

Damit wird die Stetigkeit von  $D_z$ :

$$-\frac{n_1 H_i}{\epsilon_0} \sin \vartheta_i - \frac{n_1 H_r}{\epsilon_0} \sin \vartheta_r = -\frac{n_2 H_t}{\epsilon_0} \sin \vartheta_t \quad (26.70)$$

Setzen wir das Reflexionsgesetz Gleichung 26.59 und das Brechungsgesetz von Snellius Gleichung 26.62 in Gleichung 26.70 ein finden wir Gleichung 26.63 wieder und sehen das die Stetigkeit von  $D_z$  erfüllt ist. Wir fordern, dass die Parallelkomponente des elektrischen Feldes stetig ist

$$E_i \cos \vartheta_i + E_r \cos \vartheta_r = E_t \cos \vartheta_t \quad (26.71)$$

$$\frac{H_i k_1}{\omega \epsilon_0 |\epsilon_1|} \cos \vartheta_i + \frac{H_r k_1}{\omega \epsilon_0 |\epsilon_1|} \cos \vartheta_r = \frac{H_t k_2}{\omega \epsilon_0 |\epsilon_2|} \cos \vartheta_t \quad (26.72)$$

$$\frac{H_i \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\epsilon_0 c |\epsilon_1|} \cos \vartheta_i + \frac{H_r \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}{\epsilon_0 c |\epsilon_1|} \cos \vartheta_r = \frac{H_t \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}{\epsilon_0 c |\epsilon_2|} \cos \vartheta_t \quad (26.73)$$

$$\frac{H_i n_1}{\epsilon_1} \cos \vartheta_i + \frac{H_r n_1}{\epsilon_1} \cos \vartheta_r = \frac{H_t n_2}{\epsilon_2} \cos \vartheta_t \quad (26.74)$$

Mit dem Reflexionsgesetz 26.59 finden wir

$$\cos \vartheta_r = \cos(\pi - \vartheta_i) = -\cos \vartheta_i \quad (26.75)$$

Wir setzen Gleichung 26.75 in Gleichung 26.74 ein und finden zusammen mit Gleichung 26.63 die beiden Stetigkeitsbedingungen

$$H_i - H_r = H_t \frac{n_2 \epsilon_1 \cos \vartheta_t}{n_1 \epsilon_2 \cos \vartheta_i} \quad (26.76)$$

$$H_i + H_r = H_t \quad (26.77)$$

Wir benutzen die Abkürzung

$$\beta = \frac{n_2 \epsilon_1 \cos \vartheta_t}{n_1 \epsilon_2 \cos \vartheta_i} \quad (26.78)$$

und schreiben Gleichung 26.76 als

$$\begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_t \\ H_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} H_i \quad (26.79)$$

$$\begin{pmatrix} H_t \\ H_r \end{pmatrix} = \frac{1}{-\beta - 1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} H_i \quad (26.80)$$

$$= \frac{1}{1 + \beta} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \beta \end{pmatrix} H_i \quad (26.81)$$

Wir finden die Reflexionsamplitude

$$R_p = \frac{H_r}{H_i} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = \frac{n_2 \epsilon_1 \cos \vartheta_t - n_1 \epsilon_2 \cos \vartheta_i}{n_2 \epsilon_1 \cos \vartheta_t + n_1 \epsilon_2 \cos \vartheta_i} \quad (26.82)$$

Mit dem Brechungsgesetz von Snellius 26.62 können wir den Cosinus des Transmissionswinkels als

$$\cos \vartheta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_t} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \vartheta_i} \quad (26.83)$$

schreiben und finden

$$R_p = \frac{n_2 \epsilon_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \vartheta_i} - n_1 \epsilon_2 \cos \vartheta_i}{n_2 \epsilon_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \vartheta_i} + n_1 \epsilon_2 \cos \vartheta_i} \quad (26.84)$$

Wir schreiben

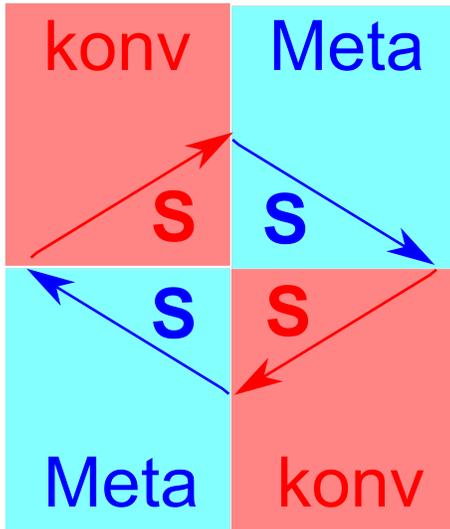
$$\frac{\epsilon_1 n_2}{\epsilon_2 n_1} = \frac{\epsilon_1 \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \text{sign}(\epsilon_2)}{\epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \text{sign}(\epsilon_1)} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1} \frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \quad (26.85)$$

und finden den finalen Ausdruck für die Reflexionsamplitude

$$R_p = \frac{\sqrt{1 - \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} \sin^2 \vartheta_i} - \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \vartheta_i}{\sqrt{1 - \frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2} \sin^2 \vartheta_i} + \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \vartheta_i} \quad (26.86)$$

Setzen wir in Gleichung 26.86 den Spezialfall  $\epsilon_1 = -\epsilon_2$  und  $\mu_1 = -\mu_2$  ein, indem die Dielektrizitätskonstanten und Permeabilitätskonstante entgegengesetzt gleich sind, dann gilt

$$R_p = 0 \quad (26.87)$$



**Abbildung 26.6:** In zwei konventionellen und zwei Metamaterialien eingesperres Licht

für alle Einfallswinkel. Die Welle wird ausschließlich transmittiert und es gibt keine reflektierte Welle. Wenn wir derartige entgegengesetzte konventionelle und Metamaterialien in vier Quadranten zusammenfügen, können wir eine ebene elektromagnetische Welle so einsperren, dass sie sich nicht vom Zusammenfügungspunkt entfernen kann (Abbildung 26.6).

## 26.4 Übungen

### 26.4.1 Transmission ins Metamaterial

Eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum ( $z < 0$ ) sei beschrieben durch das elektrische Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E (\mathbf{e}_x \cos(\omega t - k_z z) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t - k_z z)) \quad \text{für } z < 0.$$

Leiten Sie die zugehörige magnetische Induktion  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , magnetisches Feld  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , und dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  her. Die Welle trifft senkrecht auf ein Metamaterial bei  $z > 0$  der relativen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r = -1$  und magnetischer Permeabilität  $\mu_r = -1$ . Zeigen Sie, dass die ebene Welle ohne Reflexion ins Metamaterial transmittiert wird. Und geben Sie das elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , die magnetische Induktion  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , das magnetische Feld  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , und die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  im Metamaterial an.

### 26.4.2 Reflexion am Metall

Eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum ( $z < 0$ ) sei beschrieben durch das elektrische Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E (\mathbf{e}_x \cos(\omega t - k_z z) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t - k_z z)) \quad \text{für } z < 0.$$

Leiten Sie die zugehörige magnetische Induktion  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , magnetisches Feld  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , und dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  her. Die Welle trifft senkrecht auf ein Metall (konstituierende Gleichung  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ) bei  $z > 0$ . Berechnen Sie die reflektierte Welle und geben Sie das elektrische Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , die magnetische Induktion  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , das magnetische Feld  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , und die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  der reflektierten Welle an. Welche Polarisation hat die einfallende und die reflektierte Welle?

Kausalität Kaus

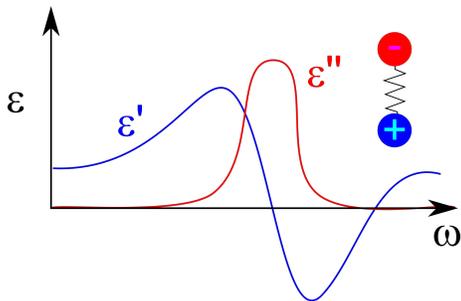
erit Kausalität

## Kapitel 27

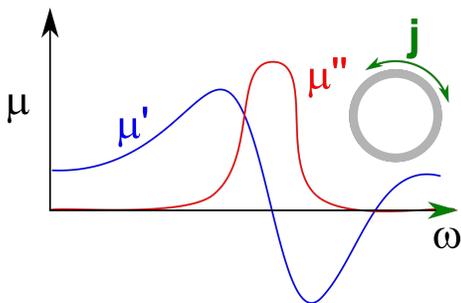
# Bau von Metamaterialien und Kramers Kronig Relationen

In dieser Vorlesung zeigen wir, wie man im Prinzip ein Metamaterial herstellt. Wir diskutieren den Verlauf der Dielektrizitätskonstante und Permeabilität als Funktion der Frequenz. Wir übersetzen das Kausalitätsprinzip in den Fourieraum und lernen über den Zusammenhang von Absorption und Dispersion.

## 27.1 Mesoskopische Metamaterialien



**Abbildung 27.1:** Verlauf von  $\epsilon'$  und  $\epsilon''$  einer elektrischen Dipolresonanz als Funktion der Kreisfrequenz



**Abbildung 27.2:** Verlauf von  $\mu'$  und  $\mu''$  einer magnetischen Dipolresonanz als Funktion der Kreisfrequenz

In Abbildung 27.1 zeigen wir den Verlauf der relativen Dielektrizitätskonstante einer elektrischen Dipolresonanz. An der Resonanz hat der Imaginärteil der relativen Dielektrizitätskonstante einen Absorptionspeak. Der Realteil der relativen Dielektrizitätskonstante hat einen bipolaren Verlauf. Unterhalb der Resonanz durchläuft der Realteil der Dielektrizitätskonstante ein Maximum durchläuft an der Resonanzfrequenz einen Wendepunkt und erreicht ein Minimum kurz oberhalb der Absorptionsfrequenz des Imaginärteils. Wenn das Minimum stark genug ausgeprägt ist kann der Realteil oberhalb der Resonanzfrequenz in einem Bereich negativ werden, indem die Absorption des Imaginärteils nicht mehr stark ist. Dieser Frequenzbereich kann zum Bau eines Metamaterials genutzt werden, wenn es gelingt ein äquivalentes Verhalten in der magnetischen Permeabilität im selben Frequenzbereich zu erreichen. Hierzu muss neben der elektrischen Dipolresonanz auch eine magnetische Dipolresonanz (Abbildung 27.2) vorliegen.

Die Herstellung eines Metamaterials bedeutet also die elektrischen und magnetischen Eigenschaften so abzustimmen, dass eine magnetische Dipolresonanz auf eine elektrische Dipolresonanz fällt. Für Moleküle liegen magnetische Dipolresonanzen energetisch Größenordnungen unterhalb der elektrischen Dipolresonanzen  $\omega_{res}^{magn} \ll \omega_{res}^{el}$ , so daß Metamaterialien im optischen bisher noch nicht verwirklicht wurden. Im Terahertzbereich gelingt es aber mesoskopische Dipolresonanzen zu bauen (Abbildung 27.3), die aus strukturierten Materialien aus unterbrochenen Ringen lithographisch

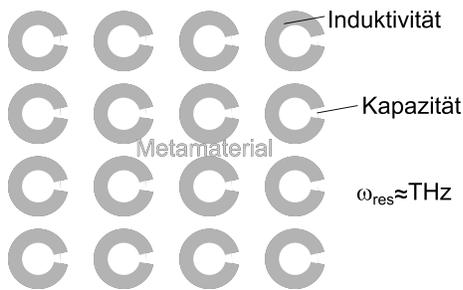


Abbildung 27.3: Aufbau eines Metamaterial für den THz-Bereich

hergestellt werden. Der Ring stellt eine Induktivität und damit eine magnetische Resonanz dar, die Unterbrechung des Ringes ist eine Kapazität. Für Objekte im Mikrometerbereich liegen die Resonanzen im Terahertzbereich.

## 27.2 Kausalität und Kramers-Kronig-Relationen

Wir betrachten ein linear dielektrisches Material mit konstituierender Gleichung

$$\mathbf{D}(t)/\epsilon_0 = \mathbf{E}(t) + \int_{-\infty}^t dt' \chi(t-t') \mathbf{E}(t') \quad (27.1)$$

Die Reaktion der dielektrischen Verschiebung auf elektrische Felder resultiert von allen elektrischen Feldern, die in der Vergangenheit liegen, nicht aber von Feldern aus der Zukunft. Elektrische Felder aus der Zukunft bestimmen nicht was in der Gegenwart passiert, was wir durch

$$\chi(t-t') = 0 \quad \text{für} \quad t' > t \quad (27.2)$$

ausdrücken, und Kausalität genannt wird. Die Ursache muss der Wirkung vorausgehen. Die Physik toleriert keinen vorseilenden Gehorsam, bei dem eine Größe auf Anerkennung in der Zukunft hofft, indem sie vermeintliche Erwartungen auf Ursachen in der Zukunft bereits im Voraus durch entsprechende Wirkungen in der Gegenwart erfüllt. Wir wollen die Kausalität einer linearen Antwort Fouriertransformieren damit wir auch im Fourierraum die Kausalität erkennen können. Die Fouriertransformierte der elektrischen Suszeptibilität lautet.

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \chi(\tau) \quad (27.3)$$

Wir setzen spaßeshalber die für reelle Frequenzen definierte Fouriertransformation in die komplexe Ebene fort und erlauben auch komplexe Kreisfrequenzen:

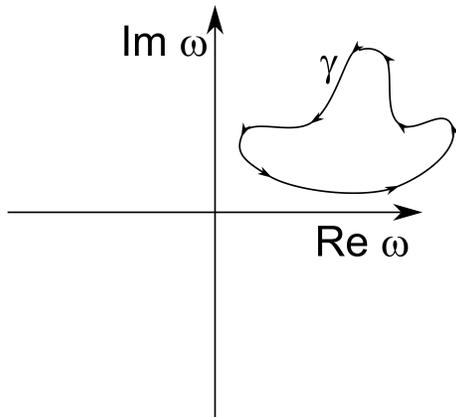
$$\omega \rightarrow \Re(\omega) + i\Im(\omega) \quad (27.4)$$

Die analytische Fortsetzung der Fouriertransformation kausaler Funktionen heißt Laplacetransformation

$$\chi(\Re(\omega) + i\Im(\omega)) = \int_0^{\infty} d\tau e^{i\Re(\omega)\tau} e^{-\Im(\omega)\tau} \chi(\tau) \quad (27.5)$$

Wir sehen, dass ein positiver Imaginärteil der Frequenz das Integral 27.5 konvergent macht und deshalb  $\chi(\Re(\omega) + i\Im(\omega))$  keinen Pol in der komplexen Halbebene  $\Im(\omega) > 0$  haben kann, dort also eine analytische Funktion sein muss. Die Übersetzung der Kausalität in den Fourierraum ist, dass  $\chi(\omega)$  als analytische Funktion in die komplexe Halbebene  $\Im(\omega) > 0$  fortgesetzt werden kann.

### 27.3 Mathematische Eigenschaften analytischer Funktionen



**Abbildung 27.4:** Das Integral einer analytischen Funktion längs eines geschlossenen Weges in der oberen Halbebene verschwindet

Wir nehmen an, daß  $f(\omega)$  eine analytische Funktion in der oberen komplexen Halbebene ist. Dann gilt

$$\oint_{\gamma} f(\omega) d\omega = 0 \quad (27.6)$$

Für jeden geschlossenen Weg  $\gamma$  in der oberen komplexen Halbebene (Abbildung 27.4). Wir wenden diesen Satz an auf die Funktion

$$f(\omega) = \frac{\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} \quad (27.7)$$

mit der festen reellen Frequenz  $\omega_0$ . Die Funktion  $f(\omega)$  ist analytisch in der oberen Halbebene weil die Suszeptibilität analytisch in der oberen Halbebene ist. Die Funktion  $f(\omega)$  ist nicht analytisch an der Stelle  $\omega = \omega_0$ , was aber kein Widerspruch zur Kausalität von  $f$  ist, denn der Pol ist auf der reellen Achse, nicht in der oberen Halbebene.

Wir benutzen Gleichung 27.6 und wählen einen Pfad  $\gamma_1 + \gamma_3$  auf der reellen Achse, den wir mit einem Halbkreis  $\gamma_4$  im Unendlichen schließen. Den neutralgischen Punkt  $\omega = \omega_0$  umschiffen wir mit einem infinitesimalen diesen Punkt vermeidenden Halbkreis  $\gamma_2$ , mit dem wir in die obere Halbebene ausweichen (Abbildung 27.5).

Wir bezeichnen den Maximalbetrag der Suszeptibilität im Zeitraum mit

$$\chi_{max} = \max(|\chi(\tau)|) \quad (27.8)$$

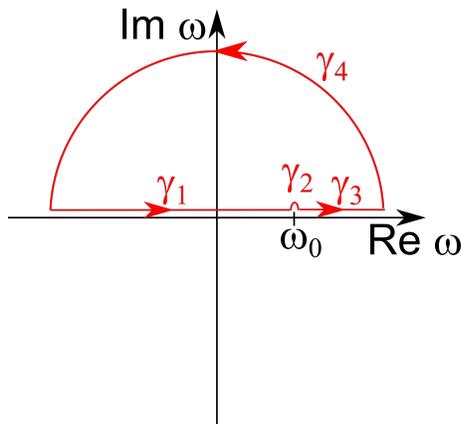


Abbildung 27.5: Integrationsweg zu Gleichung 27.10

und schätzen die Suszeptibilität auf dem unendlichen Halbkreis  $\gamma_4$  ab:

$$|\chi(\omega \rightarrow \infty)| < \int_0^{\infty} \chi_{max} e^{-\Im(\omega)\tau} d\tau = -\chi_{max} \frac{e^{-\Im(\omega)\tau}}{\omega} \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=\infty} \rightarrow 0 \quad (27.9)$$

Hiermit folgern wir dass

$$0 = \int_{\gamma} \frac{d\omega\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} = \int_{\gamma_1} \frac{d\omega\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} + \int_{\gamma_2} \frac{d\omega\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} + \int_{\gamma_3} \frac{d\omega\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} + \int_{\gamma_4} \frac{d\omega\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} \quad (27.10)$$

$$= \int_{-\infty}^{\omega_0 - \epsilon} \frac{d\omega\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} + \int_{\gamma_2} \frac{d\omega\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} + \int_{\omega_0 + \epsilon}^{\infty} \frac{d\omega\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} + \int_{\gamma_4} \frac{d\omega\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} \quad (27.11)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} + \int_{\pi}^0 \frac{i\epsilon d\phi e^{i\phi} \chi(\omega_0)}{\epsilon e^{i\phi}} \quad (27.12)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} - i\pi\chi(\omega_0) \quad (27.13)$$

Wobei wir für das symmetrisch am Pol unterbrochene Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\omega_0 - \epsilon} + \int_{\omega_0 + \epsilon}^{\infty}$  den Begriff Hauptwertintegral eingeführt haben. Wir finden die Beziehung

$$i\pi\chi(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega\chi(\omega)}{\omega - \omega_0} \quad (27.14)$$

und zerlegen Gleichung 27.14 in den Realteil

$$-\pi\chi''(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega\chi'(\omega)}{\omega - \omega_0} \quad (27.15)$$

und den Imaginärteil

$$\pi\chi'(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega\chi''(\omega)}{\omega - \omega_0} \quad (27.16)$$

ersetzen die Suszeptibilität  $\chi$  durch die relative Dielektrizitätskonstante

$$\epsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega) \quad (27.17)$$

und finden so die Kramers-Kronig Relationen

$$\epsilon'(\omega_0) - 1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega \epsilon''(\omega)}{\omega - \omega_0} \quad (27.18)$$

$$\epsilon''(\omega_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega (\epsilon'(\omega) - 1)}{\omega - \omega_0} \quad (27.19)$$

Die Kramers-Kronig Relationen sagen aus, dass der Realteil und der Imaginärteil der dielektrischen Funktion aufgrund der Kausalität nicht unabhängig voneinander sind, sondern die eine Größe aus der anderen berechnet werden kann. So gilt

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} \text{ (Peak) } = \text{ (Bipolar Dispersion) } \quad (27.20)$$

und

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} \text{ (Bipolar Dispersion) } = \text{ (Peak) } \quad (27.21)$$

Ein Absorptionspeak in  $\epsilon''$  ist immer mit einem bipolaren Dispersionsverlauf in  $\epsilon'$  verbunden der eventuell eine Exkursion ins negative oberhalb der Resonanzfrequenz macht. Ein negativer Wert der Dielektrizitätskonstante über alle Frequenzen ist nicht möglich und verletzt das Gesetz der Kausalität. Deshalb funktioniert ein Material als Metamaterial nur in einem engen Frequenzbereich.

**Kapitel 28**

**Anhang A: Python - Erste Schritte**

# First\_steps\_with\_python

May 19, 2020

## 1 How to Python?

### 1.1 A little bit of context

If you came here, it is certainly because you want to learn a little bit about programming, and more precisely about programming with python. This tutorial aims at teaching you the very basics of programming using python and will give you a few examples to start working with. If you have any demands, or any remarks to improve this tutorial, please do not hesitate to adress them at [vincent.borne@uni-bayreuth.de](mailto:vincent.borne@uni-bayreuth.de).

#### 1.1.1 Programming? Python?

Programming is the action of giving intructions to a machine, hoping in return for this machine to effectuate a certain number of processes and give you back a result. The very first computer programm is known to have been written in 1843 by Ada Lovelace to calculate sequence of Bernoulli numbers on Charles Babbage's Analytical Engine.

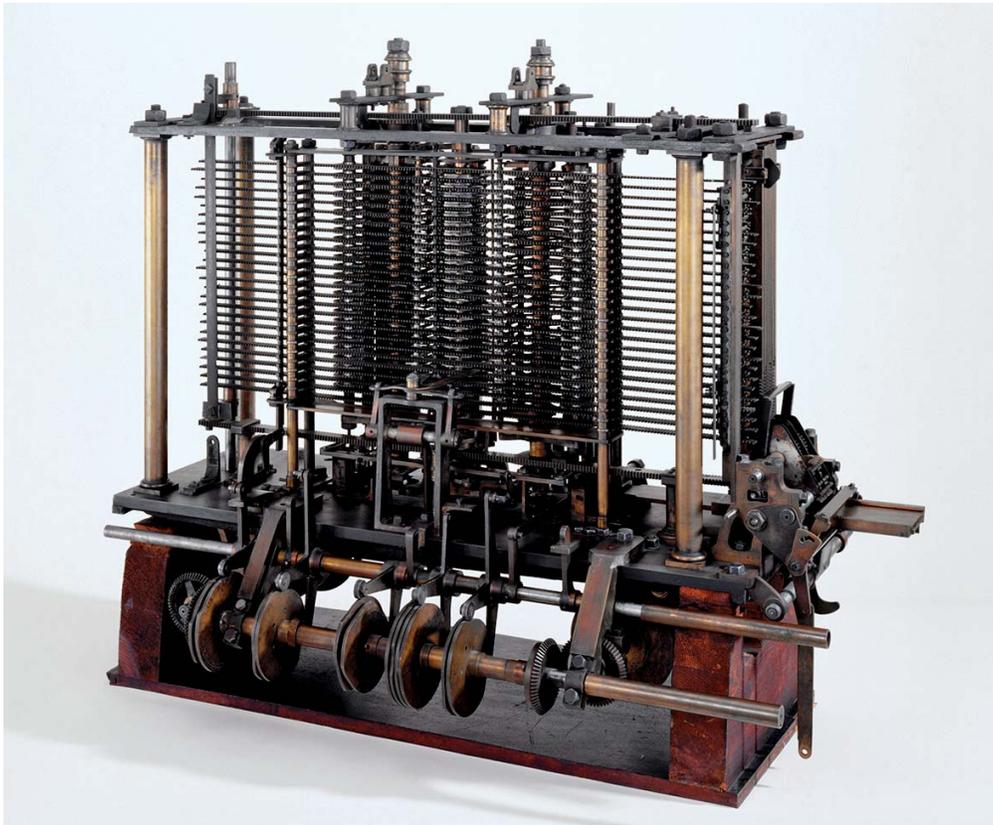
Of course to be able to give instructions to a computer, you need to speak the same language. Which means that either you are fluent in binary (the succession of 0 and 1 with which your computer works) or you use a programming language such as python which will translate and talk to the computer for you. There are many other programming languages such as C, C++, Octave, Java etc... each one with their specificities, advantages and flaws.

Python is depicted as "an easy to learn, powerful programming language. It has efficient high-level data structures and a simple but effective approach to object-oriented programming. Python's elegant syntax and dynamic typing, together with its interpreted nature, make it an ideal language for scripting and rapid application development in many areas on most platforms.". Its simplicity and the large choice of librairies and tools that does the work for you for most of the simple actions that you might require, makes it a efficient and reliable tool, for beginners but also for a lot of advanced projects.

In case you wonder the name "Python" comes from the love of its creator, Guido van Rossum, for the english BBC show "Monty Python's Flying Circus".

### 1.2 Where do I programm?

When you are programming you need two different tool: 1) the interpreter prompt or console, in which you execute your code. You can also enter directly commands in the prompt , in general short ones. You can type for example,



The Analytical Engine



```
In [4]: print("Hello world!")
```

Hello world!

Here you just entered a single statement and python returned the result of this statement : the sentence "Hello world!".

But if you need to build slightly more complex statements, you will want to use an editor to do so, i.e an environment in which you can easily build a complex command, before running it using the prompt. You have a large choice of them, but I would recommend in a first time to use editors attached to a Python prompt like [spyder](#) (available when downloading [anaconda](#)) [pyzo](#), or [Pycharm](#). If you are more used to programming you might want to try [Atom](#), [Vim](#) or [Emacs](#). And now you are ready to start!

### 1.3 How does it works?

#### 1.3.1 Litteral constant and variables

To start writing a new code you can place yourself in your favorite editor. This is where you will design the statements that you want to make, before executing them.

```
In [6]: 985*654+78/(89-6) #I can comment a line of code by adding # afterwards.  
        #This will be ignored by the console.
```

```
Out[6]: 644190.9397590362
```

I can also give name and values to some variables to play around. These variable are stored in your computer memory and to access them you need to call them by their name :

```
In [14]: from math import * #I am importing a library that defines pi for me  
        eps0=8.854*10**(-12)  
        q1=-1  
        q2=2  
        r1carré=6 #I have stored all the previous values
```

```

#and now I can call them to execute my calculus
F12=(1/(4*pi*eps0))*(q1*q2/r1carré)
print('F12=',F12) #here I use the function print (already defined in python)
#to return two different object: a string and a number

```

F12= -2995914145.996073

In the previous code you can notice the line "from math import ". Those lines at the beginning of your code allows you to call modules, i.e other pieces of code made by other people or yourself that defines a lot of objects for you. Here the module math defines for the variable "pi" for me. The star means that I wanted all of the library to be imported but I could have also used "from math import pi" to save some computational time since this is the only variable that I am using.

In the first times you will mainly use literal constants, i.e strings or numbers that have a literal value and are constant. Strings are sequences of characters that you express in quotes (" or "). For the numbers you can distinguish the *integers* numbers (for example 5 is a whole number) and *floating point* numbers (for example 5.12 or pi). Those are different type of objects :

```

In [1]: string= 'I am a string '
        integer= 3
        floating=3.58
        print('String type is',type(string))
        print('integer type is',type(integer))
        print('floating number type is',type(floating))

```

```

String type is <class 'str'>
integer type is <class 'int'>
floating number type is <class 'float'>

```

If you want to know a little bit more about the different type of objects and learn how to play around with strings you can find more informations [here](#).

### 1.3.2 Loops

One of the big advantages of computer programmes is that they can effectuate really quickly some repetitive tasks, that would otherwise take us a long time to perform (and also would be really annoying). To do so we use loops, that will run a certain programm again and again until a certain goal is reached. In Python, the indentation defines the limits of the beginning and the end of the loop. Spaces do not count. When something is wrong in your loop there is a high chance that you made a indentation mistakes somewhere! You can find a few examples of loops below :

- The IF loop

```

In [4]: Boolvar = str(input('Enter True or False : '))
        if Boolvar == 'True' :#here start my loop based on a condition
            #that my variable must fullfill
            print('Nice this is true') # I indented the result
            #that should be printed if my condition is met

```

```

elif Boolvar == 'False':
    print("Well this is false")
else:
    print('you did not entered a the wanted answer')

print('Done')
# This last statement is always executed,
# after the if statement is executed.

```

Enter True or False : False  
Well this is false  
Done

- The WHILE loop

```

In [13]: number = 23
        running = True

while running:
    guess = int(input('Enter an integer : '))

    if guess == number:
        print('Congratulations, you guessed it.')
        # this causes the while loop to stop
        running = False
    elif guess < number:
        print('No, it is a little higher than that.')
    else:
        print('No, it is a little lower than that.')

else:
    print('The while loop is over.')
    # Do anything else you want to do here

print('Done')

```

Enter an integer : 25  
No, it is a little lower than that.  
Enter an integer : 20  
No, it is a little higher than that.  
Enter an integer : 23  
Congratulations, you guessed it.  
The while loop is over.  
Done

- The FOR loop

```

In [17]: from math import factorial
        for i in range (1, 10): # is taking values from 1 to 9

```

```
x=factorial(i)
print(x)
print('Done')
```

```
1
2
6
24
120
720
5040
40320
362880
Done
```

- BREAK and CONTINUE loops

This two statement are a bit specific since they are made to interrupt the "normal" behavior of the loop. The break statement is used to break out of a loop statement i.e. stop the execution of a looping statement, even if the loop condition has not become False or the sequence of items has not been completely iterated over. The continue statement is used to tell Python to skip the rest of the statements in the current loop block and to continue to the next iteration of the loop. The next examples have been taken from this [tutorial](#) that I once recommend for more detailed informations.

```
In [3]: while True:
        s = input('Enter something : ')
        if s == 'quit':
            break
        print('Length of the string is', len(s))
        print('Done')
```

```
Enter something : skipadabadadada
Length of the string is 15
Enter something : noice
Length of the string is 5
Enter something : one last for the road
Length of the string is 21
Enter something : quit
Done
```

```
In [2]: while True:
        s = input('Enter something : ')
        if s == 'quit':
            break
        if len(s) < 3:
            print('Too small')
```

```

        continue
    print('Input is of sufficient length')

```

```

Enter something : no
Too small
Enter something : come on
Input is of sufficient length
Enter something : thanks!
Input is of sufficient length
Enter something : quit

```

### 1.3.3 Functions

Another really usefull tool that one can use with python are functions. Like for mathematical functions those are little pieces of code inside your code that you feed with variables and that will return some wanted results. It is particularly interesting to simplify and clear the code whenever you are using multiples or complex functions at the same time.

```

In [6]: from math import pi
        eps0=8.854*10**(-12)
        q1=-1
        q2=2
        r1=6

        def F12(eps,q1,q2,r): #this is where we define a function of
            #different parameters (q, r, epsilon)
            F12=(1/(4*pi*eps))*(q1*q2/r**2)
            return F12

        ans = F12(eps0,q1,q2,r1)
        print(ans)

```

```
-499319024.3326788
```

```

In [7]: import numpy as np
        nx, ny = 4, 4
        def E(q, r0, x, y): # a more complex example
            """Return the electric field vector E=(Ex,Ey) due to charge q at r0."""
            den = np.sqrt((x-r0[0])**2 + (y-r0[1])**2)**3
            Ex = q * (x - r0[0]) / den
            Ey = q * (y - r0[1]) / den
            return Ex, Ey #this is what the function returns afterwards
        x = np.linspace(-2, 2, nx)
        y = np.linspace(-2, 2, ny)
        X, Y = np.meshgrid(x, y)
        charge_positions = [[0,1]]
        charges          = [1]

```

```

ex,ey = E(charges[0],charge_positions[0],X,Y)
print(ex)
print(ey)

[[-0.04266925 -0.02296911  0.02296911  0.04266925]
 [-0.11334412 -0.11525918  0.11525918  0.11334412]
 [-0.23993366 -1.60996894  1.60996894  0.23993366]
 [-0.17888544 -0.38402321  0.38402321  0.17888544]]
[[-0.06400387 -0.10336098 -0.10336098 -0.06400387]
 [-0.09445344 -0.28814794 -0.28814794 -0.09445344]
 [-0.03998894 -0.80498447 -0.80498447 -0.03998894]
 [ 0.08944272  0.57603482  0.57603482  0.08944272]]

```

Once again if you wish to go further go [here](#).

### 1.3.4 lists

A list is an object that contains a certain numbers of items, like a shopping list or a matrix. You can create them easily:

```

In [8]: list1=['tomatoes','salt','zucchinis','tofu','pastas','toilet paper']
        print(list1)
        list2= [[1, 4, 5], [-5, 8, 9]] #a list of list (a matrix)
        print(list2)

['tomatoes', 'salt', 'zucchinis', 'tofu', 'pastas', 'toilet paper']
[[1, 4, 5], [-5, 8, 9]]

```

You can then navigate inside those lists:

```

In [9]: list1=['leeks','salt','zucchinis','tofu','pastas','toilet paper']
        list2= [[1, 4, 5], [-5, 8, 9]]
        print(list1[0])
        print(list1[3])
        print(list1[-1])
        print(list2[1])
        print(list2[0][2])

leeks
tofu
toilet paper
[-5, 8, 9]
5

```

You will notice that the numbering of the list starts at zero and that you can go through the list items backwards by using negatives.

This is it for the moment, we might go over some more complex stuff in the coming weeks, and I might modify it in a near future depending of the feedback that I receive. If you want to improve or add stuff to the present work please feel free to do so.

With this tutorial you will find a few examples of programs that I believe are accessible and interesting to manipulate to understand how to use the plotting functions. I would advise you to try them out. I might also make another quick jupyter programm to explain the code and the physic behind more in details.

```
In [10]: print('that s all folks!')
```

```
that s all folks!
```

# NumPy Tutorial für EPA2, SS2021

Adrian Ernst

Import der benötigten Pakete:

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

## 1 Einführung

In NumPy besteht ein Array aus einer endlichen Zahl an Einträgen. Um einfacher auf den richtigen Eintrag zugreifen zu können, lassen sich auch mehrdimensionale Arrays definieren. Jede Dimension (in NumPy auch Achse bzw. *axis* genannt) hat eine bestimmte Größe. Dadurch hat jedes Array eine bestimmte Form (in NumPy *shape* genannt), beispielsweise 2x3 falls die erste Achse die Größe 2 und die zweite Achse die Größe 3 hat. Das Array hat dann insgesamt  $2 \cdot 3 = 6$  Elemente.

## 2 Erstellen eines Arrays

Ein NumPy-Array lässt sich mit vielen verschiedenen Methoden erzeugen. Wir fangen mit der direkten Definition an, wir erstellen ein 2x3-Array mit festgelegten Einträgen und speichern es in der Variable *a*.

```
[2]: a = np.array(
    [[1,2,3],
     [4,5,6]]
)
```

Wir können uns nun die Form des Arrays ausgeben lassen:

```
[3]: a.shape
```

```
[3]: (2, 3)
```

ebenso wie die Gesamtzahl der Einträge:

```
[4]: a.size
```

```
[4]: 6
```

### 3 Auswählen von Elementen

Um auf ein bestimmtes Element zuzugreifen können wir für jede Achse angeben welches Element wir haben wollen. Auf das erste Element einer Achse wird dabei mit 0 zugegriffen, auf das zweite mit 1 usw.:

```
[5]: a[0,2]
```

```
[5]: 3
```

**Aufgabe:** Wie bekommt man die Zahl 5 aus dem Array a?

```
[6]: #a[?, ?]
```

Man kann nicht nur ein einzelnes Element auswählen, sondern auch mehrere. Dazu gibt es den `:`, welcher, falls er alleine steht, effektiv "alles" bedeutet. Um zum Beispiel das ganze a auszugeben kann man schreiben

```
[7]: a
```

```
[7]: array([[1, 2, 3],
          [4, 5, 6]])
```

aber auch

```
[8]: a[:, :]
```

```
[8]: array([[1, 2, 3],
          [4, 5, 6]])
```

Man kann auch eine der Spalten auswählen, z.B. die Spalte mit dem Einträgen (2, 5):

```
[9]: a[:, 1]
```

```
[9]: array([2, 5])
```

**Aufgabe:** Wie bekommt man die zweite Zeile aus dem Array?

```
[10]: #a[?, ?]
```

Nun zu der Form des Ergebnisses einer Selektion. Falls ihr für eine bestimmte Achse einen festen Wert wählt verschwindet diese Achse anschließend. Wenn wir wie oben die zweite Spalte auswählen verschwindet der Spaltenindex, nur noch der Index für die Spalten verbleibt.

```
[11]: a[:, 1].shape
```

```
[11]: (2,)
```

Falls nicht nur ein bestimmter Wert einer Achse ausgewählt werden bleibt die jeweilige Achse natürlich vorhanden. Es gibt auch noch die Möglichkeit mehrere Werte einer Achse auszuwählen, ich verweise dazu auf die [NumPy-Dokumentation](#).

Eine kurze Schreibweise um viele hintereinander folgende `:` abzukürzen ist `...`. Dies darf nur einmal innerhalb einer Selektion auftauchen und erzeugt so viele Doppelpunkte wie

notwendig sind um für alle Achsen eine Auswahl festgelegt ist. Falls das Array `b` zum Beispiel 5 Achsen hat sind beide folgende Ausdrücke äquivalent: `b[0, :, :, :, 1]` und `b[0, ..., 1]`. ... am Ende einer Selektion kann man auch weglassen.

## 4 Funktionen zum Erzeugen von Arrays

Es folgt eine Reihe von Funktionen um Arrays zu erstellen, eine vollständige Liste gibt es wieder in der [NumPy-Dokumentation](#).

### 4.1 Ein Array aus lauter Nullen (oder Einsen) mit der gegebenen Form, der Parameter ist dabei eine Liste $([n,m, \dots])$ oder ein Tupel $((n,m, \dots))$

```
[12]: a0 = np.zeros((1,2,3,4))
      a1 = np.ones((1,2,3,4))
```

```
[13]: a0, a1
```

```
[13]: (array([[[[0., 0., 0., 0.],
              [0., 0., 0., 0.],
              [0., 0., 0., 0.]],
             [[0., 0., 0., 0.],
              [0., 0., 0., 0.],
              [0., 0., 0., 0.]]]]]),
      array([[[[1., 1., 1., 1.],
              [1., 1., 1., 1.],
              [1., 1., 1., 1.]],
             [[1., 1., 1., 1.],
              [1., 1., 1., 1.],
              [1., 1., 1., 1.]]]]]))
```

```
[14]: a0.shape, a1.shape
```

```
[14]: ((1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4))
```

### 4.2 Ein Array aus lauter Nullen (oder Einsen) in der Form des gegebenen Arrays

```
[15]: b0 = np.zeros_like(a0)
      b1 = np.ones_like(a0)
```

```
[16]: b0
```

```
[16]: array([[[[0., 0., 0., 0.],
              [0., 0., 0., 0.],
              [0., 0., 0., 0.]],
             [[0., 0., 0., 0.],
              [0., 0., 0., 0.],
              [0., 0., 0., 0.]]]]])
```

```
[17]: a0.shape, b0.shape
```

```
[17]: ((1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 4))
```

### 4.3 Ein linearer Verlauf zwischen zwei Skalaren oder Arrays. Der erste Parameter ist der Startwert, der zweite der Endwert und der dritte die Zahl der Schritte.

```
[18]: c = np.linspace(0, 10, 5)
c
```

```
[18]: array([ 0. ,  2.5,  5. ,  7.5, 10. ])
```

Falls man den Endwert ausschließen möchte kann man `endpoint=False` benutzen.

```
[19]: c2 = np.linspace(0, 10, 5, endpoint=False)
c2
```

```
[19]: array([0., 2., 4., 6., 8.])
```

## 5 Verändern von Arrays

Eine vollständige Liste der Funktionen befindet sich in der [NumPy-Dokumentation](#).

### 5.1 Verändern von Werten

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten ein NumPy-Array zu verändern oder zu verformen. Das Einfachste ist das Austauschen von Werten. Einen einzelnen Wert kann man einfach zuweisen:

```
[20]: a = np.array(
    [[1,2,3],
     [4,5,6]]
)
```

```
[21]: a
```

```
[21]: array([[1, 2, 3],
          [4, 5, 6]])
```

```
[22]: a[0,0] = 10
a
```

```
[22]: array([[10,  2,  3],
          [ 4,  5,  6]])
```

Man kann auch ganze Bereiche zuweisen

```
[23]: a[:,1] = [20, 50]
a
```

```
[23]: array([[10, 20,  3],
          [ 4, 50,  6]])
```

oder mit Bereichen rechnen

```
[24]: a[:,2] = 3*a[:,2]
a
```

```
[24]: array([[10, 20,  9],
           [ 4, 50, 18]])
```

Rechenoperationen mit Skalaren werden dabei übrigens auf jedes ausgewählte Element einzeln angewandt.

## 5.2 Verändern der Form

Manchmal ist es notwendig eine neue Achse der Größe 1 einzufügen. Dabei bleibt die Gesamtzahl der Elemente im Array gleich. Man kann dafür `np.newaxis` in der Selektion verwenden:

```
[25]: a.shape
```

```
[25]: (2, 3)
```

```
[26]: a[:,np.newaxis,:].shape
```

```
[26]: (2, 1, 3)
```

**Aufgabe:** Füge eine Achse zu hinzu, sodass aus `a` ein Array der Form `(1, 2, 3)` entsteht.

```
[27]: #a[?].shape
```

Man kann auch Achsen Vertauschen, z.B. mit `np.swapaxes`

```
[28]: np.swapaxes(a,0,1).shape
```

```
[28]: (3, 2)
```

```
[29]: np.swapaxes(a,0,1)
```

```
[29]: array([[10,  4],
           [20, 50],
           [ 9, 18]])
```

Da hier kein `=` stand (und auch keine Funktion verwendet wurde die explizit auf dem Ursprungsarray arbeitet) wirken Bearbeitung dieser Art nicht auf das Ursprungsarray.

```
[30]: a.shape
```

```
[30]: (2, 3)
```

Als Alternative zu `np.swapaxes` gibt es auch `np.moveaxis` was nicht vertauscht, sondern nur eine (oder mehrere) Achse(n) an eine neue Position schiebt.

### 5.3 Kombinieren von Arrays

Man kann zwei oder mehr Arrays kombinieren wenn sie im Sinne der gewählten Funktion "kompatibel" zueinander sind. Eine Möglichkeit ist das Nebeneinander- oder Übereinanderstapeln von Arrays. Die Funktion `np.concatenate` ändert die Zahl der Achsen nicht:

```
[31]: a1 = np.array(
      [[1,2,3],
      [4,5,6]])
      a2 = np.array(
      [[ 7, 8, 9],
      [10,11,12]])
```

```
[32]: a1.shape
```

```
[32]: (2, 3)
```

```
[33]: a2.shape
```

```
[33]: (2, 3)
```

```
[34]: a12 = np.concatenate([a1,a2])
      a12
```

```
[34]: array([[ 1,  2,  3],
      [ 4,  5,  6],
      [ 7,  8,  9],
      [10, 11, 12]])
```

```
[35]: a12.shape
```

```
[35]: (4, 3)
```

oder nebeneinander

```
[36]: a12n = np.concatenate([a1,a2], axis=1)
      a12n
```

```
[36]: array([[ 1,  2,  3,  7,  8,  9],
      [ 4,  5,  6, 10, 11, 12]])
```

```
[37]: a12n.shape
```

```
[37]: (2, 6)
```

Dabei gibt das `axis`-Argument an in welcher Achse gestapelt werden soll. Falls die Achsen nicht passen wird ein Fehler ausgegeben:

```
[38]: a2t = np.swapaxes(a2,0,1)
      np.concatenate([a1,a2t])
```

```

-----
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-38-b8eba8cde66d> in <module>
      1 a2t = np.swapaxes(a2,0,1)
----> 2 np.concatenate([a1,a2t])

<__array_function__ internals> in concatenate(*args, **kwargs)

ValueError: all the input array dimensions for the concatenation axis must
↳match exactly, but along dimension 1, the array at index 0 has size 3 and
↳the array at index 1 has size 2

```

Die Fehlermeldung sagt auch genau, was der Fehler ist (die Dimensionen der Arrays stimmen nicht so überein dass das Array verbunden werden kann). Die Fehlermeldung sagt sogar wo der Fehler aufgetreten ist (das erste Array hat in der zweiten Achse die Größe 3, das zweite Array in der zweiten Achse aber die Größe 2).

Man kann Arrays auch so kombinieren dass eine neue Achse erzeugt wird, beispielsweise mit

```
[39]: a12s = np.stack([a1,a1,a2,a2],axis=-1)
      a12s
```

```
[39]: array([[[ 1,  1,  7,  7],
             [ 2,  2,  8,  8],
             [ 3,  3,  9,  9]],

            [[ 4,  4, 10, 10],
             [ 5,  5, 11, 11],
             [ 6,  6, 12, 12]])
```

```
[40]: a12s.shape
```

```
[40]: (2, 3, 4)
```

Der Parameter axis gibt dabei an an welcher Stelle die neue Achse eingefügt werden soll, -1 bedeutet dass eine neue Achse am Ende erstellt wird.

**Aufgabe:** Es ist ein Array x gegeben. Es soll nur durch Zusammenfügen und Verändern der Form das Array y erreicht werden. Die Gleichheit wird mit np.array\_equal geprüft.

```
[41]: x = np.array([1, 2, 3])
      x
```

```
[41]: array([1, 2, 3])
```

```
[42]: y = np.array([[1, 1, 1, 2, 3],
                   [2, 2, 1, 2, 3],
                   [3, 3, 1, 2, 3]])
      y
```

```
[42]: array([[1, 1, 1, 2, 3],
           [2, 2, 1, 2, 3],
           [3, 3, 1, 2, 3]])
```

```
[43]: #ysol=?
      #np.array_equal(ysol,y)
```

## 5.4 Kombinieren von Arrays mit `np.meshgrid`

In vielen Fällen möchte man eine Funktion auf einem mehrdimensionalen Raum ausführen. Dazu benötigt man die Koordinaten an jedem Punkt an dem die Funktion ausgewertet werden soll. In der Regel sind das Punkte die in jeder Achse einen gleichmäßigen Abstand haben (also ein Gitter). Im Eindimensionalen können wir ein solches Gitter mit `np.linspace` erzeugen:

```
[44]: tx = np.linspace(0,10,5)
      tx
```

```
[44]: array([ 0. ,  2.5,  5. ,  7.5, 10. ])
```

Dieses Gitter hat nun die Form  $(nx,)$ . Im Dreidimensionalen bräuchte das Gitter vier Achsen, drei für die Indexierung des Punkts und noch eine für die Indizierung des Ortsvektors. Ein solches Gitter hätte also die Form  $(nx,ny,nz,3)$ . Es ist Konvention als letzte Achse (oder letzte Achsen für Matrizen) den Index für den eigentlichen Vektor (Matrix) zu verwenden. Um ein Gitter für die drei Komponenten zu erzeugen gibt es die Funktion `np.meshgrid`. Diese gibt allerdings kein Array zurück, sondern ein Tupel von Arrays, im 3D-Raum zum Beispiel ein Tupel mit 3 Arrays der Form  $(nx,ny,nz)$ . Um die Arrays zu kombinieren kann man `np.stack` einsetzen. `np.meshgrid` verwendet standardmäßig (wie auch manche `matplotlib`-Funktionen) vertauschte x- und y-Achsen. Um das zu verhindern wird `indexing='ij'` benötigt.

```
[45]: tx = np.linspace(0,10,4)
      ty = np.linspace(0,10,5)
      tz = np.linspace(0,10,6)
      m = np.meshgrid(tx,ty,tz,indexing='ij')
```

Jetzt mit `np.stack` kombinieren, sodass der Vektor über die letzte Achse indiziert wird:

```
[46]: r = np.stack(m,axis=-1)
      r.shape
```

```
[46]: (4, 5, 6, 3)
```

## 6 Rechnen mit Arrays

Wir benutzen NumPy eigentlich zum Rechnen. Dabei gibt es in NumPy abseits der Standard-Rechenoperatoren wie `+*/` auch Funktionen wie Sinus oder Cosinus. Noch mehr Funktionen befinden sich im SciPy-Paket. Eine vollständige Liste der [NumPy](#) und [SciPy](#) Funktionen finden sich in der jeweiligen Dokumentation.

## 6.1 Rechnen mit Skalaren und einem Array

Das Rechnen mit nur einem Array als Argument und ansonsten nur Skalaren ist wie oben schon gezeigt sehr einfach.

```
[47]: r=np.array([2,3,5])
      r
```

```
[47]: array([2, 3, 5])
```

```
[48]: 2*(r+1)
```

```
[48]: array([ 6,  8, 12])
```

## 6.2 Rechnen mit mehreren Arrays

Falls allerdings mehrere Argumente Arrays sind muss darauf geachtet werden dass die Arrays kompatibel ("broadcastable") sind da die Operation elementweise ausgeführt wird.

```
[49]: r*r
```

```
[49]: array([ 4,  9, 25])
```

funktioniert, während beispielsweise

```
[50]: r*np.array([1,2])
```

```
-----
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-50-166c5175b94f> in <module>
----> 1 r*np.array([1,2])

ValueError: operands could not be broadcast together with shapes (3,) (2,)
```

einen Fehler ausgibt dass die Formen inkompatibel sind. Es gibt dazu in der [NumPy-Dokumentation](#) unter "Broadcasting" eine genaue Beschreibung was funktioniert und was nicht. Die wichtigsten Regeln fasse ich im Folgenden zusammen: 1. Alle Arrays mit identischer Form sind kompatibel, solange die Datentypen kompatibel sind (Datentypen erkläre ich am Ende) 2. Die Arrays sind kompatibel, falls sie bei der selben Achse zwar eine unterschiedliche Größe haben, in einem der Arrays aber die Größe 1 3. An eines der beiden Arrays Achsen der Größe 1 vorne angehängt werden können sodass 2 zutrifft.

Zum Beispiel (Regel 2) funktioniert

```
[51]: k1=np.zeros((3,4,5))
      k2=np.zeros((4,5))
      k1*k2
```

```
[51]: array([[ [0., 0., 0., 0., 0.],
              [0., 0., 0., 0., 0.],
              [0., 0., 0., 0., 0.],
              [0., 0., 0., 0., 0.] ],
```

```

[[0., 0., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 0., 0.]],

[[0., 0., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 0., 0.],
 [0., 0., 0., 0., 0.]])

```

da man an k2 vorne eine Achse anhängen kann (dann (1,4,5)) und die erste Achse bei beiden Arrays dann unterschiedlich ist ((3,4,5) und (1,4,5)), dort wo sie sich unterscheiden aber eine Achse die Größe 1 hat.

Das folgende gibt dahingegen einen Fehler aus:

```
[52]: k1=np.zeros((3,4,5))
      k2=np.zeros((3,4))
      k1*k2
```

```

-----
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-52-32c0fce998b3> in <module>
      1 k1=np.zeros((3,4,5))
      2 k2=np.zeros((3,4))
----> 3 k1*k2

ValueError: operands could not be broadcast together with shapes (3,4,5) (3,4)

```

Selbst wenn man das neue k2 (3,4) vorne erweitert (1,3,4) ist es inkompatibel zu k1 (3,4,5) da bspw. die zweiten Achsen die Größen 3 und 4 stehen, diese sind unterschiedlich und keine davon ist 1. Wir könnten hier manuell eine neue Achse an der richtigen Stelle einführen (falls es Sinn macht, überlegt immer was ihr eigentlich rechnen wollt!)

**Aufgabe:** Wir haben ein zufälliges Array a aus 10x20 Vektoren welches in der letzten Achse die x-, y- und z-Werte gespeichert hat. Wir nehmen nun mit  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  den Betrag dieser Vektoren und speichern ihn in eine neuen Variable b. Jetzt wollen wir aus den Vektoren Einheitsvektoren machen indem wir die Vektoren durch ihre Beträge teilen. Allerdings haben wir das Problem dass eine Fehlermeldung ausgegeben wird dass die Formen nicht passen. Wie können wir das Problem beheben?

```
[53]: a = np.random.rand(10,20,3)
      b = np.sqrt(a[... ,0]**2 + a[... ,1]**2 + a[... ,2]**2)
      ea = a/b
```

```

-----
ValueError                                Traceback (most recent call last)
<ipython-input-53-9401444aa484> in <module>
      1 a = np.random.rand(10,20,3)
      2 b = np.sqrt(a[... ,0]**2 + a[... ,1]**2 + a[... ,2]**2)
----> 3 ea = a/b

```

```
ValueError: operands could not be broadcast together with shapes (10,20,3)
↳(10,20)
```

### 6.3 Rechnen mit nicht elementweisen Operatoren

In der Praxis benötigt man häufig Operationen wie ein Skalarprodukt oder ein Matrixprodukt, bei denen die Operatoren nicht Elementweise wirken, sondern auf mehrere Elemente. Beispielsweise wird bei einem Skalarprodukt nach der Multiplikation jeweils über mehrere Elemente summiert. In NumPy stehen dafür verschiedene Funktionen zur Verfügung, eine vollständige Liste findet sich [in der NumPy-Dokumentation](#).

Eine universelle Methode um eine Multiplikation über mehrere Achsen mit anschließender Summation auszuführen ist die Funktion `np.einsum`. Wie der Name suggeriert orientiert sich die Syntax an der Einsteinschen Summenkonvention. Stellen wir uns zum Beispiel vor, wir haben zwei Vektoren  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  und  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ .

```
[54]: a = np.array([1,2])
      b = np.array([3,4])
```

Wenn wir das Skalarprodukt  $c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$  berechnen wollen würden wir das in der Einsteinschen Summenkonvention schreiben als  $c = a_i b_i$ . Für den Aufruf der Funktion `np.einsum` müssen wir nun die Indizes von den Variablennamen separieren, d.h.  $(a_i)$   $(b_i)$  wird zu  $(a,b)$   $(i,i)$ . Nach dem  $\rightarrow$  müssen die Indizes stehen, welche übrigbleiben, in diesem Fall keine. Man kann dann das Skalarprodukt wie folgt ausführen:

```
[55]: c = np.einsum("i,i -> ", a, b)
      c
```

```
[55]: 11
```

Oft haben wir nicht nur einen Vektor oder Matrix in einer Variablen, sondern viele. Die verbleibenden Indizes lassen sich mit  $\dots$  übergehen. Dabei müssen die verbleibenden Indizes in ihrer ursprünglichen Reihenfolge miteinander kompatibel ("broadcastable") sein. Wenn wir das gleiche Beispiel wie gerade eben mit vielen Vektoren ausführen, müssen wir nur die Punkte vor den Indizes hinzufügen:

```
[56]: a = np.array([[1,2], [3,4], [5,6], [7,8]])
      b = np.array([[2,3], [4,5], [6,7], [8,9]])
      c = np.einsum("...i,...i -> ...", a, b)
      c
```

```
[56]: array([ 8, 32, 72, 128])
```

Wir können mit `np.einsum` auch ein dyadisches Produkt erzeugen, indem wir  $d_{ij} = a_i b_j$  schreiben:

```
[57]: d = np.einsum("...i,...j -> ...ij", a, b)
      d
```

```
[57]: array([[ 2,  3],
           [ 4,  6]])
```

```

[[12, 15],
 [16, 20]],

[[30, 35],
 [36, 42]],

[[56, 63],
 [64, 72]])

```

Eine Matrix können wir an einen Vektor multiplizieren mit  $r_i = M_{ij}v_j$

```

[58]: M = np.array([[1, 2],
                   [3, 4]])
      v = np.array([1, 2])
      r = np.einsum("...ij,...j -> ...i",M,v)
      r

```

```

[58]: array([ 5, 11])

```

## 7 Datentypen

Ein Array besteht aus vielen Elementen eines einzelnen Typs. Zum Rechnen sind in den meisten Fällen Fließkommazahlen sinnvoll. Bei NumPy lässt sich der Datentyp bei der Erstellung eines Arrays mit `dtype` angeben oder es lässt sich ein Array mit der Funktion `.astype` in ein Array aus anderen Datentypen umwandeln. Falls man mit Arrays aus unterschiedlichen Datentypen rechnet kann NumPy in vielen Fällen ein Array an das andere anpassen, aber nicht immer. In diesen Fällen wird eine Fehlermeldung ausgegeben. Details finden sich wieder in der [NumPy-Dokumentation](#) unter "Casting Rules".

Wenn wir ein Array definiert haben können wir uns mit `.dtype` auch dessen Typ anzeigen lassen.

```

[59]: a = np.array([1,2,3])
      a.dtype

```

```

[59]: dtype('int64')

```

Hier haben wir das Array mit ganzen Zahlen erzeugt, also ist ein Array aus Elementen des Typs "int" entstanden. Die Zahl hinter "int" gibt die Zahl der Bits an in denen eine Zahl gespeichert wird. Wenn wir das Array mit Fließkommazahlen erzeugen erhalten wir einen anderen Typ, nämlich "float":

```

[60]: b = np.array([1.5,2.5,3.5])
      b.dtype

```

```

[60]: dtype('float64')

```

Wie oben erwähnt lassen sich viele Typen miteinander verrechnen:

```

[61]: (a*b).dtype

```

```
[61]: dtype('float64')
```

Da in einem Ganzzahlenformat keine Fließkommazahl dargestellt werden kann wandelt NumPy den Typ von a bei der Rechnung temporär in eine Fließkommazahl um, das Ergebnis ist dann auch eine Fließkommazahl.

Wir können mit `.astype` den Typ von b in den Typ von a explizit umwandeln, dabei kann aber Information verloren gehen.

```
[62]: b.astype(a.dtype)
```

```
[62]: array([1, 2, 3])
```

Mit der Angabe von `casting` können wir steuern ob nur "sichere", also verlustarme Umwandlungen stattfinden dürfen. Dann wird ein Fehler ausgegeben:

```
[63]: b.astype(a.dtype, casting="safe")
```

```
-----  
TypeError                                Traceback (most recent call last)  
<ipython-input-63-93685e54758c> in <module>  
----> 1 b.astype(a.dtype, casting="safe")  
  
TypeError: Cannot cast array data from dtype('float64') to dtype('int64')  
↳ according to the rule 'safe'
```

Andersherum funktioniert es hingegen:

```
[64]: a.astype(b.dtype, casting="safe")
```

```
[64]: array([1., 2., 3.])
```

## 8 Beispiele

### 8.1 Beispiel 1

Wir wollen auf einem Gitter ( $x \in [-2\pi, 2\pi]$ ,  $y \in [-2\pi, 2\pi]$ ) mit 100x100 Einträgen  $f(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y)$  berechnen. Wir beginnen mit dem Gitter:

```
[65]: t = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 100)
```

t ist jetzt ein 1d-Array mit Werten von  $-2\pi$  bis  $2\pi$ .

```
[66]: x, y = np.meshgrid(t,t,indexing="ij")
```

x und y sind jetzt jeweils (100, 100)-Arrays. Man kann das von `np.meshgrid` zurückgegebenen Tupel "entpacken" falls man eine richtige Anzahl an Variablennamen mit Komma getrennt vor das `=`-Zeichen schreibt.

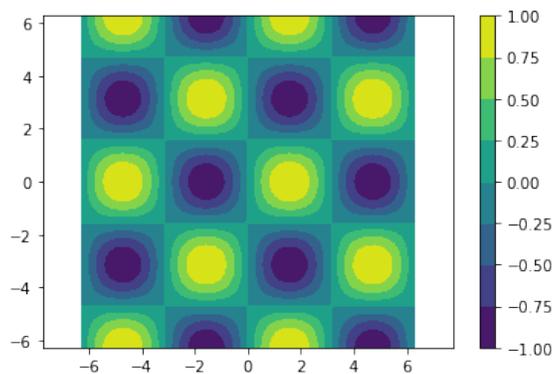
```
[67]: def f(x,y):  
       return np.sin(x) * np.cos(y)
```

Die Funktion  $f(x,y)$  spiegelt jetzt die obige Definition wider.

```
[68]: result = f(x,y)
```

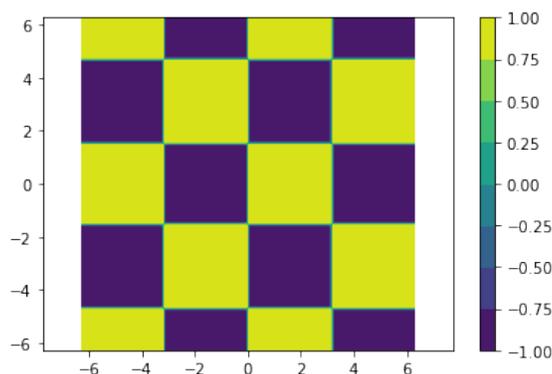
Die Funktion  $f$  wurde mit den Gittern als Argument aufgerufen und das Ergebnis in `result` gespeichert. Dieses lässt sich jetzt beispielsweise als Konturplot zeichnen.

```
[69]: %matplotlib inline
plt.contourf(x,y,result)
plt.colorbar();
plt.axis("equal");
```



Wir können das Ergebnis jetzt weiterbearbeiten, z.B. können wir eine Signumfunktion darauf anwenden und das Ergebnis plotten.

```
[70]: %matplotlib inline
plt.contourf(x,y,np.sign(result))
plt.colorbar();
plt.axis("equal");
```



und wir haben ein Schachbrettmuster erhalten.

**Aufgabe:** Ändere das obige Programm so ab dass das Schachfeld genau 8x8 Felder hat (ohne  $f$  zu verändern)

## 8.2 Beispiel 2

Es soll das elektrische Feld eines Dipols aus zwei Ladungen mit entgegengesetztem Vorzeichen bei  $r = (0, 0, \pm d)$  in der x-z-Ebene geplottet werden. Dazu definieren wir zuerst das elektrische Feld am Punkt  $x$  einer Punktladung am Ort  $x_0$ . Dabei setzen wir jegliche Konstanten gleich 1, sodass nur  $\pm r/r^3$  übrigbleibt.

```
[71]: def E(x, x0, sign):
      r = x - x0
      r_abs = np.sqrt(r[...,0]**2 + r[...,1]**2 + r[...,2]**2)[...,np.newaxis]
      # Bei der Indexierung [...,i] verlieren wir die letzte Achse, deshalb
      ↪mussten wir sie anschließend wieder hinzufügen.
      # Ein kürzerer Weg wäre die Verwendung von np.linalg.norm(r,axis=-1)
      ↪gewesen
      return sign*r/r_abs**3
```

Jetzt definieren wir das E-Feld des Dipols:

```
[72]: def E_dipol(x, d):
      c1 = np.array([0,0,d])
      c2 = np.array([0,0,-d])
      return E(x, c1, 1) + E(x, c2, -1)
```

Nun erzeugen wir das Gitter auf welchem wir E\_dipol berechnen wollen:

```
[73]: tx = np.linspace(-1,1,10)
      ty = np.array([0]) # Wir wollen in der y=0 Ebene rechnen
      tz = np.linspace(-1,1,10)

      x = np.stack(np.meshgrid(tx, ty, tz, indexing="ij"), axis=-1)
      x.shape
```

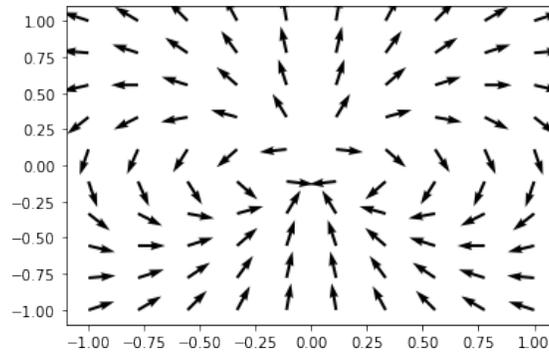
```
[73]: (10, 1, 10, 3)
```

Wir können jetzt die Werte berechnen:

```
[74]: E_result = E_dipol(x, 0.1)
```

Jetzt können wir das Feld beispielsweise mit `plt.quiver` aus matplotlib plotten. Dazu normalisieren wir zuerst das Ergebnis da ansonsten die Pfeile sehr unterschiedliche Längen haben. Außerdem müssen wir explizit angeben über welche Achsen wir plotten wollen (mit `:`), da bei der Verwendung von `[...,i]` drei Achsen übrigbleiben und matplotlib nicht weiß was es damit anfangen soll.

```
[75]: %matplotlib inline
      E_result_normalized = E_result/np.linalg.norm(E_result,axis=-1)[...,np.
      ↪newaxis]
      plt.quiver(x[:,0,:,0], x[:,0,:,2], E_result_normalized[:,0,:,0],
      ↪E_result_normalized[:,0,:,2], norm=True);
```



**Aufgabe:** Da wir eigentlich nur in zwei Dimensionen rechnen erzeugt die y-Achse nur Schreibarbeit. Ändere das obige Beispiel so ab, dass ganz ohne y-Achse gearbeitet wird. Der sich ergebende Plot muss dabei identisch bleiben. Die Definition von E schaut dann z.B. so aus:

```
[76]: def E(x, x0, sign):
        r = x - x0
        r_abs = np.sqrt(r[...,0]**2 + r[...,1]**2)[...,np.newaxis] # <---- Hier
        ↳ wurde +r[...,2]**2 entfernt
        return sign*r/r_abs**3
```

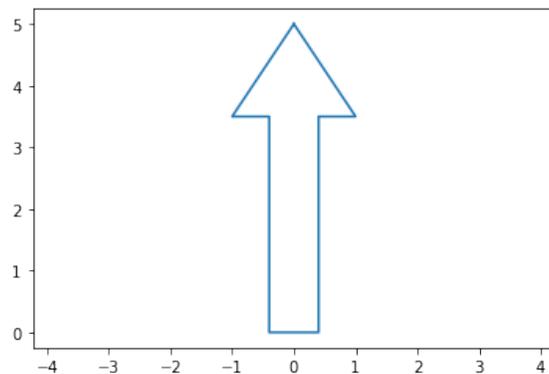
### 8.3 Beispiel 3

Wir können aus zyklisch miteinander verbundenen Punkten einen Pfeil zeichnen.

```
[77]: punkte = np.array([[0,5],[1,3.5],[0.4,3.5],[0.4,0],[-0.4,0],[-0.4,3.5],[-1,3.
        ↳ 5],[0,5]])
        punkte.shape
```

[77]: (8, 2)

```
[78]: %matplotlib inline
        plt.plot(punkte[...,0],punkte[...,1])
        plt.axis("equal");
```

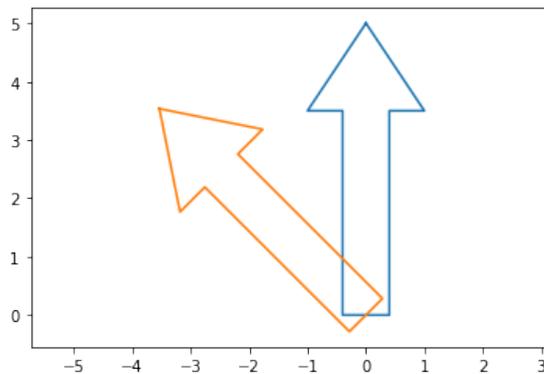


Wir können den Pfeil mit Hilfe einer Rotationsmatrix drehen.

```
[79]: alpha = 45/180.*np.pi #45 Grad in Bogenmaß umrechnen
R = np.array([[np.cos(alpha), -np.sin(alpha)],
              [np.sin(alpha), np.cos(alpha)]])
punkte2 = np.einsum("ij,uj -> ui", R, punkte)
punkte2.shape
```

[79]: (8, 2)

```
[80]: %matplotlib inline
plt.plot(punkte[... ,0], punkte[... ,1])
plt.plot(punkte2[... ,0], punkte2[... ,1])
plt.axis("equal");
```



**Aufgabe:** Es ist ein Array aus Winkeln gegeben. Daraus wird ein Array aus Matrizen erzeugt. Wende dieses auf die Punkte an und plote dann alle gedrehten Pfeile. `plt.plot` akzeptiert auch 2d-Arrays als Argumente, in diesem Fall bezeichnet die zweite Achse die einzelnen Datensätze.

```
[81]: alpha = np.array([0, 60, 120, 180, 240, 300])/180.*np.pi
```

```
[82]: R = np.array([[np.cos(alpha), -np.sin(alpha)],
                  [np.sin(alpha), np.cos(alpha)]])
R = np.moveaxis(R, [0,1], [-2,-1]) # Zur Erfüllung der Konvention die
↳ Achsenreihenfolge korrigieren, d.h. die erste Achse wird die vorletzte, die
↳ zweite die letzte
R.shape
```

[82]: (6, 2, 2)

```
[83]: %matplotlib inline
#plotdata = np.einsum("ij,uj -> ui", R, punkte)
#plt.plot(plotdata[... ,0], plotdata[... ,1])
#plt.axis("equal");
```



## Kapitel 29

# Anhang B: Python - Vorlagen zu den Programmieraufgaben

# EPA2 Programmiervorlagen und Hinweise

Adrian Ernst  
Experimentalphysik X  
Universität Bayreuth

## 1 Vorlage für Programmierung: Elektrisches Dreieck

Es soll das elektrische Feld mehrerer Punktladungen gezeichnet werden. Anschließend soll der Punkt gefunden werden an dem das elektrische Feld verschwindet.

### 1.1 Import der benötigten Pakete

- NumPy zum Rechnen
- Matplotlib zum plotten
- Circle aus matplotlib.patches zum Zeichnen von Kreisen
- ScaledTranslation aus matplotlib.transforms zur korrekten Anzeige der Kreise

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Circle
from matplotlib.transforms import ScaledTranslation
```

### 1.2 Definition der Ladungen

Zuerst definieren wir eine Klasse die die Informationen für eine Punktladung enthält:

```
[2]: class Charge(object):
    def __init__(self,q,position):
        self.q = q
        self.position = np.asarray(position)
    def __str__(self):
        return "Ladung {:+g} an der Position ({:g}, {:g})".format(self.q, self.
        ↪position[0], self.position[1])
```

Eine Punktladung mit der Ladung +1 an der Position (2,3) lässt sich dann wie folgt definieren:

```
[3]: charge = Charge(+1,(2,3))

# put charge in list for later
charges = [charge]
```

```
print(charge)
```

Ladung +1 an der Position (2, 3)

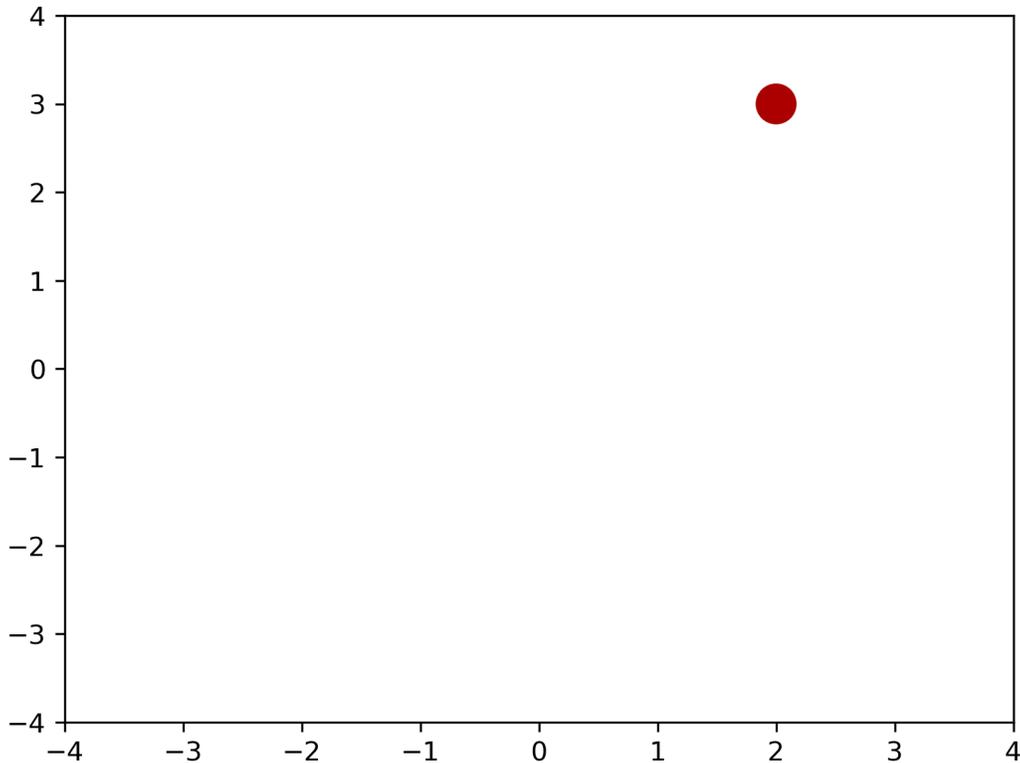
### 1.3 Zeichnen der Ladungen

Jetzt schreiben wir eine Funktion um die als Liste übergebenen Ladungen zu zeichnen. Positive Ladungen werden rot, negative Ladungen blau.

```
[4]: charge_colors = {True: '#aa0000', False: '#0000aa'}
def plot_charges(charges):
    ax=plt.gca()
    for charge in charges:
        #define transform such that we get circles in viewport, see https://
        →matplotlib.org/3.1.1/tutorials/advanced/transforms_tutorial.html
        transform = plt.gcf().dpi_scale_trans + ScaledTranslation(charge.
        →position[0], charge.position[1], ax.transData)
        #add circle to plot at the charge position with radius 0.1 and color
        →form charge_colors
        ax.add_artist(Circle((0,0), 0.1, color=charge_colors[charge.
        →q>0],transform=transform,zorder=10))
```

Wir zeichnen nun zum Testen die Ladung von oben.

```
[5]: %matplotlib inline
plt.xlim(-4,4)
plt.ylim(-4,4)
plot_charges(charges)
```



## 1.4 Definition des elektrischen Feldes

Wir definieren jetzt eine Funktion zur Berechnung des elektrischen Feldes  $E$  einer gegebenen Punktladung. Die Parameter sind  $q$  für die Menge der Ladung,  $x_q$  für die Position der Ladung und  $x$  die Position an der das Feld berechnet wird.

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{mit} \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_q$$

Zur Vereinfachung setzen wir  $\epsilon_0 = 1$  und  $\epsilon_r = 1$ .

Potenzen in Python werden mit `**` geschrieben:  $a^x \hat{=} a^{**}x$

```
[6]: EPSILON_0 = 1
      EPSILON_R = 1
      def E(charge,x):
          # calculate the vector from the charge to the current position
          r = x-charge.position
          # get the length of r, axis=-1 means the last axis is used as the vector_
          ↪index
          r_abs = np.linalg.norm(r, axis=-1)
          # calculate the electric field vector
```

```

    # the [...,np.newaxis] is required because r_abs is a scalar and we want to
    →divide element wise
    return charge.q / (4*np.pi*EPSILON_0*EPSILON_R) * r / r_abs[...,np.
    →newaxis]**3

```

## 1.5 Berechnung der Feldwerte

Jetzt werden die Werte des elektrischen Feldes auf einem Gitter berechnet. Zuerst wird das Gitter berechnet.

`np.linspace` gibt Punkte in einem gleichmäßigen Abstand aus.

```

[7]: # the minimum coordinate calculated
MIN_T = -4

# the maximum coordinate calculated
MAX_T = 4

# the number of different coordinate positions per axis
NUM_T = 40

x1=np.linspace(MIN_T, MAX_T, NUM_T)
x2=np.linspace(MIN_T, MAX_T, NUM_T)

```

`np.meshgrid` kombiniert mehrere Arrays zu mehreren Gittern, je eines pro Dimension. Die Option 'xy' sorgt dafür dass die Achsen in absteigender Reihenfolge sind, d.h. y entspricht Achse 0, x entspricht Achse 1.

`np.stack` fügt die Gitter schließlich zusammen.

```

[8]: grids = np.meshgrid(x1, x2, indexing='xy')
x = np.stack(grids, axis=-1)

```

x hat nun drei Achsen. Die ersten beiden Achsen laufen durch die verschiedenen Gitterpunkte in y und x-Richtung, die dritte Achse wählt den x oder y-Wert des Punktes. `x[4,6,1]` beschreibt also den y-Wert am Gitterpunkt (4,6).

Auf dem Gitter wird nun  $E$  für eine Ladung berechnet:

```

[9]: E1 = E(charges[0],x)

```

`E1` hat die gleiche Form wie `x`, nur anstatt der x und y-Werte enthält sie die Komponenten des elektrischen Feldes in x und y-Richtung.

## 1.6 Visualisierung des Feldes

Wir definieren jetzt zwei Funktionen um das Feld zu visualisieren. Die erste malt Pfeile und die zweite Feldlinien:

```
[10]: def plot_field_quiver(x,E):
    # calculate the length of the field vectors
    E_len = np.linalg.norm(E,axis=-1)
    # calculate the normalized field vectors
    E_norm=E/E_len[...,None]

    # plot field
    plt.quiver(x[...0], x[...1], E_norm[...0], E_norm[...1], np.log(np.
→clip(E_len,-3,3)),scale=100,cmap="cool",pivot="middle")

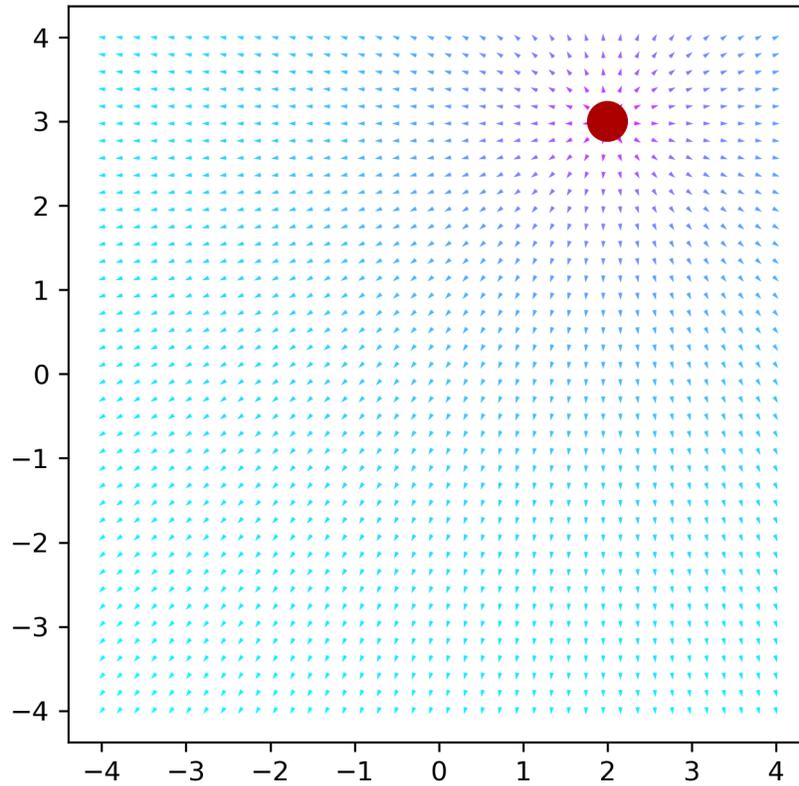
def plot_field_streamlines(x,E):
    # calculate the length of the field vectors
    E_len = np.linalg.norm(E,axis=-1)
    # calculate the normalized field vectors
    E_norm=E/E_len[...None]
    # calculate the logarithm of the length
    E_len_log = np.log(E_len)

    # plot field
    plt.streamplot(x[...0], x[...1], E[...0], E[...1], color=E_len_log,
→density=5, cmap="cool")
```

Diese können wir nun nutzen um unsere Ladungen zusammen mit dem Feld zu zeichnen:

```
[11]: %matplotlib inline
# set axis scaling equal (same x and y scale)
plt.axis("equal")
plt.gcf().set_size_inches(5, 5)

plot_field_quiver(x, E1)
plot_charges(charges)
```



Die oben definierten Funktionen kann man nun nutzen um das Feld für mehrere Ladungen zu berechnen...

### 1.7 Hinweise

- mit NumPy-Arrays gleicher Größe kann man elementweise mit den normalen Grundrechenart-Operatoren  $+ - * /$  rechnen
- im Paket `scipy.optimize` gibt es eine Funktion `fmin` (nicht zu verwechseln mit der gleichnamigen Funktion von NumPy). Damit kann man ein lokales Minimum der gegebenen Funktion nähern lassen

## 2 Vorlage für Programmierung: Stabladungen

Es sollen die Äquipotentiallinien der Lösung der Poissongleichung geplottet werden.

### 2.1 Import der benötigten Pakete

- NumPy zum Rechnen
- Matplotlib zum plotten
- Die Jacobischen elliptischen Funktionen aus SciPy für `cn`

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import ellipj
```

### 2.2 Die Jacobischen elliptischen Funktionen

Die Jacobischen elliptischen Funktionen gibt es in zwei unterschiedlichen Versionen, einmal mit dem Parameter  $k$  und einmal mit dem Parameter  $m$ . Dabei ist üblicherweise  $k^2 = m$ .

Da SciPy nur eine Version für nicht-komplexes  $u$  enthält, müssen wir die reelle Version nutzen um daraus die komplexe zu erstellen. Die dazu nötigen Formeln ergeben sich aus der Definition über elliptische Integrale, siehe <https://paramanands.blogspot.com/2011/01/elliptic-functions-complex-variables.html>.

```
[2]: def ellipj_complex(u, m):
    isn, icn, idn, iph = ellipj(u.imag, 1-m);
    rsn, rcn, rdn, rph = ellipj(u.real, m)
    den = icn*icn+m*rsn*rsn*isn*isn;
    sn = rsn*idn/den + rcn*rdn*isn*icn/den *1j;
    cn = rcn*icn/den - rsn*rdn*isn*idn/den * 1j;
    dn = rdn*icn*idn/den - m*rsn*rcn*isn/den *1j;
    return sn,cn,dn
```

### 2.3 Mehrere Rückgabewerte

Die Funktion `ellipj` (und auch unsere komplexe Variante) gibt drei verschiedene Werte aus. Dies geschieht als `tuple`. Man kann dieses beim zuweisen von Werten "entpacken" wenn man genau die richtige Anzahl an Variablenamen mit Komma getrennt angibt, z.B.

```
[3]: def f():
    return 1, 2, 3
a, b, c = f()
"a={:g}, b={:g}, c={:g}".format(a, b, c)
```

```
[3]: 'a=1, b=2, c=3'
```

## 2.4 Komplexe Zahlen in Python

In der von uns neu definierten Funktion sieht man auch, wie man mit den komplexen Zahlen umgeht.  $i$  schreibt man in python als  $j$  direkt nach einer Zahl. Auf den Real- und Imaginärteil greift man mit `.real` bzw. mit `.imag` zu.

```
[4]: z = 1+2j
      "{:g} mit Realteil {:g} und Imaginärteil {:g}".format(z, z.real, z.imag)
```

```
[4]: '1+2j mit Realteil 1 und Imaginärteil 2'
```

## 2.5 Hinweise

Jetzt können wir mit der eigentlichen Aufgabe beginnen...

Hinweise:

- mit `plt.contour` lassen sich Linien gleicher Werte plotten
- `cn` ist periodisch, daran kann man erkennen ob der Wertebereich groß genug gewählt ist
- unsere Funktion `ellipj_complex` akzeptiert auch numpy Arrays als Parameter `u`
- NumPy-Arrays können auch für komplexe Zahlen definiert werden
- schaut auch in die Vorlage zur letzten Programmieraufgabe, es gibt einige Dinge die man hier wiederverwenden kann

### 3 Vorlage für Programmierung: Bahnen hochenergetischer geladener Teilchen im Gravitationsfeld

Als Beispiel wird hier die Bahn eines Teilchens berechnet. Ein Teilchen der Masse  $m$  bewegt sich um einen sehr schweren Körper mit Masse  $M$  im Ursprung ( $m \ll M$ ).

#### 3.1 Import der benötigten Pakete

- NumPy zum Rechnen
- Matplotlib zum plotten
- Matplotlib-Erweiterung für einen 3d-Plot
- Numba zur schnelleren Ausführung der Integration

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from numba import jit, njit
```

#### 3.2 Bewegungsgleichung

Wir beginnen mit der Bewegungsgleichung.

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$$

$m$  ist konstant,  $F$  kennen wir in Abhängigkeit von  $\mathbf{r}$  und  $\dot{\mathbf{r}}$ . Wir können diese DGL umschreiben in

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{m} \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \quad (2)$$

Somit können wir beide DGLs zusammen numerisch in der Zeit integrieren.

#### 3.3 Numerische Integration der DGL

Wir nutzen zur Integration ein Eulerverfahren. Dieses ist allerdings nicht besonders stabil, deshalb benötigen wir eine kleine Schrittweite, also ein kleines  $\Delta t$ . Ob unsere Schritte klein genug sind können wir hier überprüfen, indem wir die Gesamtenergie des Systems am Beginn und am Ende der Integration berechnen. Da Energieerhaltung gilt muss diese konstant bleiben.

Zur Berechnung der vielen Schritte ist Python eigentlich ungeeignet. Die Berechnungen mit den großen NumPy-Arrays laufen schnell, da diese intern in C/C++ bzw. Fortran programmiert wurden. Allerdings gibt es ein Python-Paket namens *Numba* welches eine Untermenge von Python und NumPy in Maschinencode übersetzen kann. Weitere Informationen dazu gibt es in der [Numba Referenz](#).

Wir werden einige der folgenden Funktionen mit `@jit` oder mit `@njit` annotieren. In der ersten Variante versuch Numba so viel in Maschinencode zu übersetzen wie möglich, in der zweiten Variante zwingen wir Numba dazu, alles in Maschinencode zu übersetzen. Falls dies nicht möglich ist wird bei Aufruf der Funktion ein Fehler ausgegeben.

### 3.4 Gravitationskraft und -energie

Die Gravitationskraft schreiben wir als

$$F = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{e}_r$$

und die potentielle Energie von  $m$  als

$$E = -G \frac{Mm}{r}$$

Wir beschränken uns auf einen einzelnen Wert für die 3d-Vektoren  $r$  und  $v$  pro Funktionsaufruf. Einfachheitshalber setzen wir  $G = 1$  und  $M = 1$

```
[2]: G=1
M=1

@njit
def F(r, v, m):
    r_abs2 = r[0]**2 + r[1]**2 + r[2]**2
    return -G * M * m / r_abs2 * r / np.sqrt(r_abs2)

def E(r,v,m):
    r_abs2 = r[0]**2 + r[1]**2 + r[2]**2
    return -G * M * m/np.sqrt(r_abs2)
```

### 3.5 Ausführung der Integration in der Zeit

Jetzt haben wir alles um die Bahn eines Teilchens zu berechnen. Dazu implementieren wir zuerst eine Methode zur Integration eines einzelnen Schritts. Die Parameter sind dabei folgende:

- $dt$ :  $\Delta t$ , ein Zeitschritt
- $r$ :  $r$ , die Position des Teilchens
- $v$ :  $v$ , die Geschwindigkeit des Teilchens
- $m$ :  $m$ , die Masse des Teilchens

Bei den vektoriellen Größen wird die Änderung der Werte auf die neuen aufaddiert und damit die alten Werte verändert. Deshalb müssen sie auch nicht mit `return` zurückgegeben werden. Dies funktioniert in Python aber nicht mit primitiven Datentypen wie einzelnen Fließkommazahlen.

```
[3]: @njit
def step(dt, r, v, m):
    f = F(r, v, m)
    v += f/m * dt
    r += v * dt
```

Jetzt brauchen wir noch eine Funktion, welche die obige sehr oft aufruft und immer wieder Zwischenergebnisse speichert. Diese hat noch mehr Parameter, nämlich zusätzlich

- $n$ : Zahl der Iterationen pro Aufzeichnungsschritt
- $nr$ : Zahl der Aufzeichnungsschritte

Insgesamt werden  $n \cdot nr$  Schritte durchgeführt.

Die Funktion gibt eine Liste der Positionen zurück. Die Position die der Liste nach  $n$  Schritten hinzugefügt wird muss vorher kopiert werden. Ansonsten würde die Liste nur die Endpositionen enthalten.

```
[4]: @jit
def integrate(dt, r, v, m, n, nr):
    rl=[]
    for i in range(nr):
        for j in range(n):
            step(dt, r, v, m)
        rl.append(r.copy())
    return rl
```

Um die Bahnen mehrerer verschiedener Teilchen zu berechnen schreiben wir noch eine Funktion die als Parameter nur  $r$  und  $v$  hat und auch überprüft ob die Gesamtenergie gleich bleibt. Außerdem konvertiert sie das Ergebnis in ein NumPy-Array.

```
[5]: def integrate_particle(r, v):
    dt = 1e-5
    n = 1000
    nr = 1000
    m = 1
    r=np.asarray(r,dtype=np.float64)
    v=np.asarray(v,dtype=np.float64)
    #if np.abs(np.dot(r,v)) > 1e-10:
    #    raise Exception("r and v not perpendicular")
    r0=r.copy() # copy r for later
    v0=v.copy() # copy v for later
    result=integrate(dt, r, v, m, n, nr)
    v0_abs = np.linalg.norm(v0)
    v_abs = np.linalg.norm(v)
    E0 = 0.5*m*v0_abs**2 + E(r0, v0, m)
    E1 = 0.5*m*v_abs**2 + E(r, v, m)
    if np.abs(E0-E1) / v0_abs > 1e-2:
        raise Exception("Energy has changed by more than 1%")
    return np.asarray(result)
```

Wir können jetzt für ein einzelnes Teilchen dessen Bahn berechnen. Wir geben dazu nur die Startwerte an.

```
[6]: rl = integrate_particle(r=[0,0,1], v=[np.sqrt(2)/2,0,np.sqrt(2)/2])
```

Jetzt können wir die Bahn plotten. Wir zeichnen zusätzlich noch einen Punkt an den Ursprung.

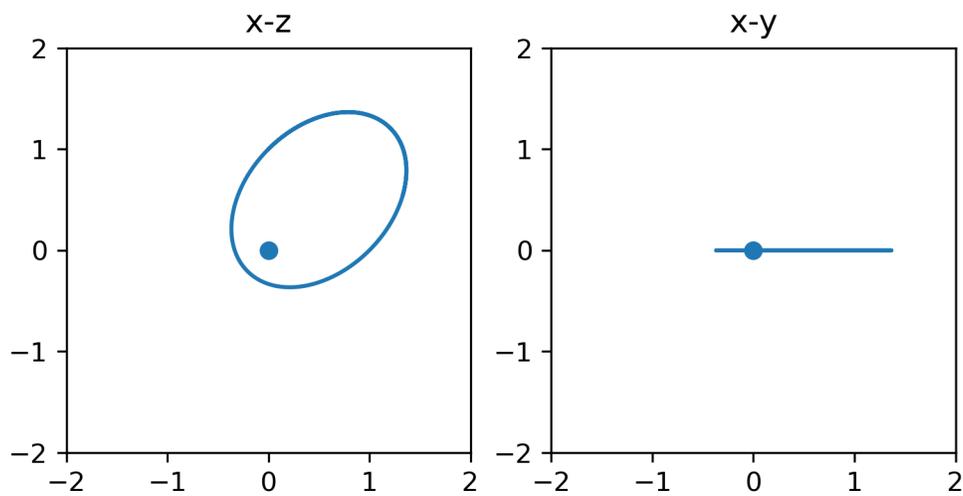
```
[7]: %matplotlib inline
fig, axs = plt.subplots(1,2)
fig.set_size_inches(6,3)
```

```

axs[0].plot(r1[:,0],r1[:,2])
axs[0].scatter(0,0)
axs[0].set_xlim(-2,2)
axs[0].set_ylim(-2,2)
axs[0].set_title("x-z")
axs[0].set_aspect("equal","box")

axs[1].plot(r1[:,0],r1[:,1])
axs[1].scatter(0,0)
axs[1].set_xlim(-2,2)
axs[1].set_ylim(-2,2)
axs[1].set_title("x-y")
axs[1].set_aspect("equal","box")

```

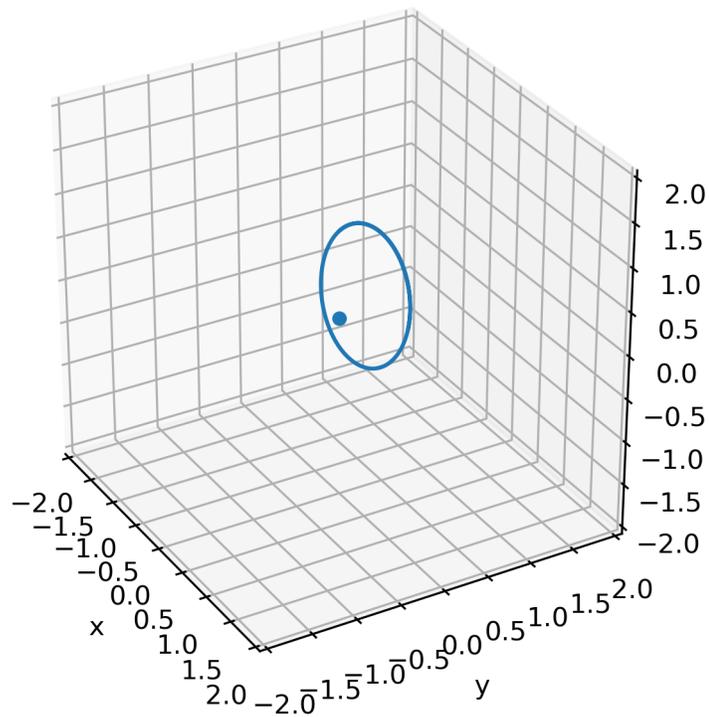


Und in 3D

```

[8]: %matplotlib inline
fig = plt.figure()
fig.set_size_inches(5,5)
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
ax.set_zlabel("z")
ax.set_xlim(-2,2)
ax.set_ylim(-2,2)
ax.set_zlim(-2,2)
ax.plot(r1[:,0],r1[:,1],r1[:,2])
ax.scatter(0,0,0)
ax.view_init(30,-30)

```



Das oben gemachte lässt sich analog auch für das Teilchen im Magnetfeld durchführen...

### 3.6 Hinweise

- mit `plt.contour` lassen sich Linien gleicher Werte plotten
- für die in Numba verfügbaren Funktionen am besten die [Numba Referenz](#) konsultieren.
- falls es mit Numba nicht funktioniert, einfach die `@jit` und `@njit` entfernen, dann läuft es halt langsamer
- für das Kreuzprodukt zwischen 3d-Vektoren gibt es `np.cross`, funktioniert auch in Numba

## 4 Hinweise zur Programmierung: Virtueller Spiegeldipol

- Naturkonstanten finden sich in dem Paket `scipy.constants` (z.B. `import scipy.constants as scc`)
- Der Winkel eines 2d-Vektors lässt sich mit der Funktion `arctan2` in NumPy bzw. `atan2` in `math` bestimmen. (Vorsicht mit der Reihenfolge der Parameter)
- Das Plotten vom Feld und den Feldlinien ist ähnlich zur ersten Übung

## 5 Hinweise zur Programmierung: Würfelkantenstrom

- Es ist am einfachsten das Magnetfeld numerisch zu integrieren, wenngleich auch nicht am schnellsten. Dazu kann man das Integral als Summe über viele kleine Stromstücke umschreiben.
- Alternativ kann man das B-Feld für einen Stab analytisch berechnen und dann für die verschiedenen Teilstücke transformieren.
- Das Plotten vom Feld ist ähnlich zur ersten Übung bzw. falls dreidimensional wie in der dritten Übung, siehe auch [hier](#).
- Um die Gestalt des Feldes weit weg vom Würfel gut zu zeigen hilft es das Feld in einer bestimmten Ebene (welcher?) zu berechnen und zweidimensional zu plotten.

## 6 Vorlage für Programmierung: Energiedichte des magnetischen Streifenmusters

Es wird anstatt des Streifenmusters mit dem Magnetfeld eines langen Leiters bei  $r = (0, 0, -1)$  gerechnet.

### 6.1 Import der benötigten Pakete

- NumPy zum Rechnen
- Matplotlib zum plotten (matplotlib.ticker zum Festlegen eigener Skalen im Plot)
- Numba zur schnelleren Ausführung der Integration

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.ticker as tck
import numba
```

### 6.2 Magnetfeld des Dipols

Das Magnetische Feld des Leiters ist gegeben durch

$$H_z^l - iH_x^l = -\frac{I}{2\pi\sqrt{x^2 + (z+1)^2}}e^{i\text{atan2}(z+1,x)}$$

wobei  $I$  der Strom durch den Leiter ist. Wir schreiben diesen Ausdruck nun in Python zur Berechnung des magnetischen Feldes:

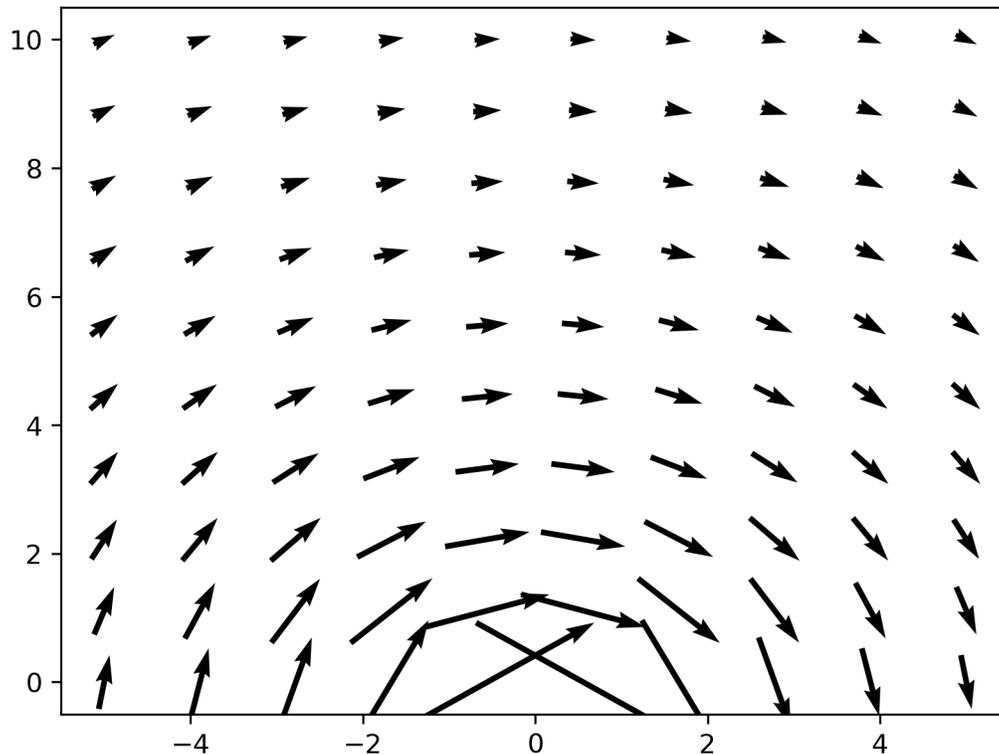
```
[2]: @numba.njit
def Hl(x, z, I):
    result = -I/(2*np.pi*np.sqrt(x**2+(z+1)**2))*np.exp(1j*np.arctan2(z+1,x))
    #Falls eine Summe vorkommt:
    #result = np.zeros_like(x+1j*z)
    #for i in range(n):
    #    result += `i-tes Element`
    return result.conjugate()
```

### 6.3 Visualisieren des Feldes

Wir visualisieren nun das berechnete Feld um die Definition auf grobe Fehler zu prüfen:

```
[3]: %matplotlib inline
tx = np.linspace(-5,5,10)
tz = np.linspace(0,10,10)
r = np.stack(np.meshgrid(tx,tz,indexing='ij'),axis=-1)
H=Hl(r[... ,0],r[... ,1], 1)
plt.quiver(r[... ,0],r[... ,1],H.imag,H.real,pivot="middle")
```

```
[3]: <matplotlib.quiver.Quiver at 0x7fa1c66d75e0>
```



## 6.4 Externes Magnetfeld

Nun berechnen wir das externe Feld in Abhängigkeit des Winkels  $\varphi_{ext}$ :

```
[4]: @numba.njit
def Hext(H, phi):
    return H * ( np.cos(phi) + 1j*np.sin(phi) )
```

## 6.5 Definition der Parameter

Da wir die Parameter I und H ( $H_{ext}$ ) konstant lassen wollen definieren wir einen Typ für ein strukturiertes Array welches die benötigten Daten enthält:

```
[5]: parameter_type = np.dtype([('I', np.double), ('H', np.double)])
```

```
[6]: parameters=np.zeros(1, dtype=parameter_type)[0]
parameters["I"]=1
parameters["H"]=1
```

## 6.6 Energiedichte

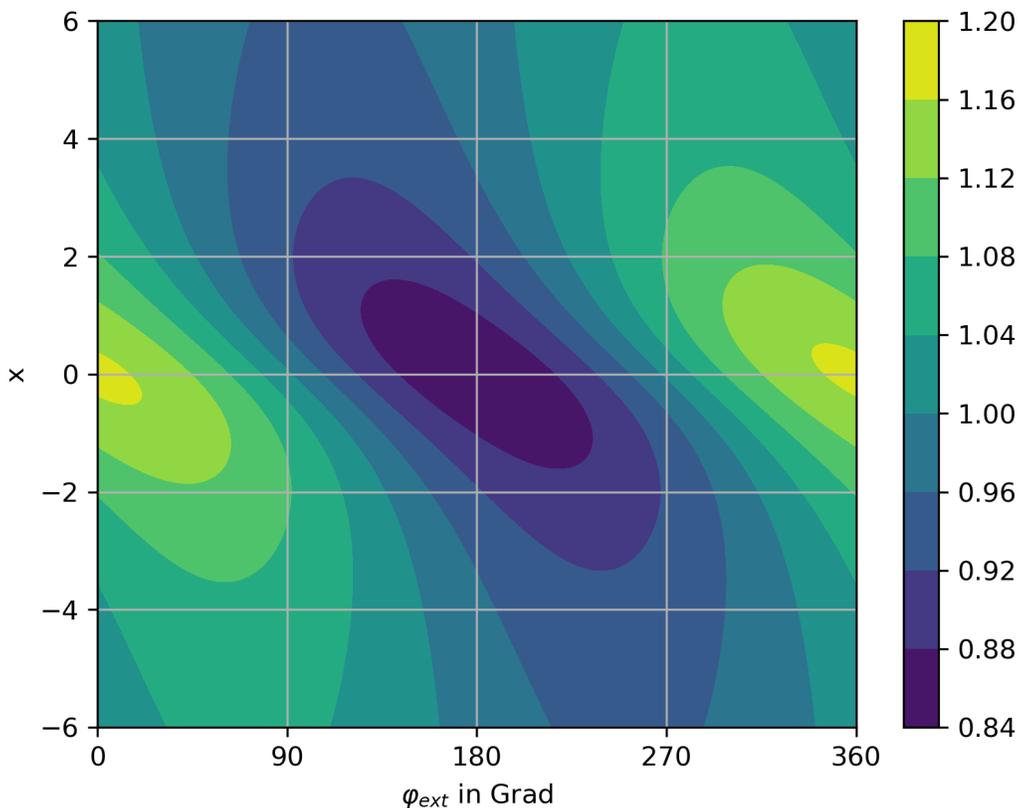
Nun schreiben wir den Ausdruck für die Energiedichte des Magnetfeldes:

```
[7]: @numba.njit
def U(x, z, phi, params):
    Hl_ = Hl(x, z, params["I"])
    Hext_ = Hext(params["H"], phi)
    U = (Hl_.imag + Hext_.real)**2 + ( Hl_.real + Hext_.imag)**2
    return U
```

Nun plotten wir  $U$  in Abhängigkeit von  $\varphi_{ext}$  und  $x$  bei fester Höhe  $z$ . Wir generieren dazu zuerst die Werte für  $\varphi_{ext}$  und  $x$  und berechnen dann  $U$ :

```
[8]: tphi = np.linspace(0, 2*np.pi, 500)
tx = np.linspace(-6, 6, 500)
phi, x = np.meshgrid(tphi, tx)
U_phi_x = U(x, 1, phi, parameters)
```

```
[9]: %matplotlib inline
plt.contourf(phi/np.pi*180, x, U_phi_x)
plt.grid(True)
plt.xlabel("$\\varphi_{ext}$ in Grad")
plt.ylabel("x")
plt.gca().xaxis.set_major_locator(tck.MultipleLocator(base=90)) # Schöne Zahlen
    → an der x-Achse
plt.colorbar(); # Balken zur Erklärung der Farben
```



## 6.7 Trajektorie

Um eine Trajektorie zu berechnen nutzen wir das Eulerverfahren. Da wir das externe Feld sehr langsam bewegen und somit die Reibung überwiegt können wir einfach schreiben  $v \propto F$ . Wir ändern  $\varphi_{ext}$  linear mit der Zeit.  $n$  Bezeichnet die Anzahl der Integrationsschritte,  $nrec$  die Zahl der Schritte nach dem eine Aufzeichnung der Position gemacht wird und  $z$  die fest eingestellte Höhe. Die "Kraft" auf das Teilchen wird mit Hilfe eines Differentialquotienten (Entfernung von der aktuellen Position  $dx$ ) berechnet der mit einer Konstante  $dt$  multipliziert wird.

```
[10]: @numba.njit
def trajektorie(x0, phi0, phi1, n, nrec, z, dx, dt, params):
    x0 = np.asarray(x0, dtype=np.float64)
    traj=[]
    dphi = (phi1-phi0)/(n-1)
    dx = 1e-6
    for i in range(n):
        if i%nrec == 0:
            traj.append(x0.copy())
            U_l=U(x0-dx, z, phi0+i*dphi, params)
            U_u=U(x0+dx, z, phi0+i*dphi, params)
            x0 += (U_u-U_l)/(2*dx)*dt
    return traj
```

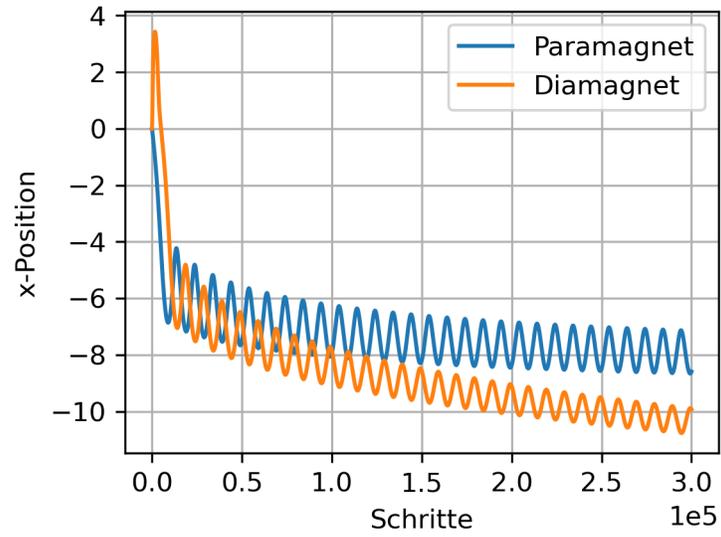
```
[11]: x0 = 0
phi0 = 0
n_umdrehungen = 30
phi1 = n_umdrehungen*np.pi * 2
n = 10000*n_umdrehungen
nrec = 10
z = 1
dx = 1e-6
dt = 0.1
traj_para=trajektorie(x0, phi0, phi1, n, nrec, z, dx, dt, parameters)
```

Ein Diamagnet möchte sich in einem Bereich mit möglichst kleinem Feld aufhalten, d.h. an Stellen an denen  $U$  möglichst klein ist. Um die Trajektorie zu berechnen wechseln wir einfach das Vorzeichen von  $U$  (indem wir  $dt$  negativ setzen):

```
[12]: dt = -dt
```

```
[13]: %matplotlib inline
traj_dia=trajektorie(x0, phi0, phi1, n, nrec, z, dx, dt, parameters)
plt.plot(range(0,n,nrec), traj_para, label="Paramagnet")
plt.plot(range(0,n,nrec), traj_dia, label="Diamagnet")
plt.xlabel("Schritte")
```

```
plt.ylabel("x-Position")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.gcf().set_size_inches(4,3)
plt.ticklabel_format(style="sci", scilimits=(-2,2))
```



## 7 Vorlage für Programmierung: Vom Kraftwerk zum Verbraucher

Als Beispiel wird auf der Sekundärseite anstatt des Motors ein Widerstand verwendet.

### 7.1 Import der benötigten Pakete

- NumPy zum Rechnen
- Matplotlib zum plotten
- Numba zur schnelleren Ausführung der Integration

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numba
```

### 7.2 Beschreibung des Systems

Das System lässt sich wie folgt beschreiben:

An einem Generator wirkt ein konstantes Drehmoment  $\tau_{\text{ext},1}$ . Durch die elektromotorische Kraft kann man das Gesamtdrehmoment eines Generators schreiben als

$$\tau_{\text{ges}} = \tau_{\text{ext}} + \tau_{\text{int}} = \tau_{\text{ext}} + IS_S \times \mathbf{B}_{\text{ext}} = \Theta \cdot \dot{\omega}$$

wobei  $S_S = N\pi R^2 \mathbf{n}$  der Spulenflächenvektor ist. Die durch die Flussänderung bei Drehung des Generators entstehende elektromotorische Kraft in Richtung des Leiters lässt sich schreiben als

$$\mathcal{EMF} = -\mathbf{B}_{\text{ext}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_S)$$

Der Generator ist mit einem Transformator verbunden, dieser lässt sich über den Zusammenhang der elektromotorischen Kraft und des Stromes über die Induktivitäten darstellen:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{EMF}_1 \\ \mathcal{EMF}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dI_1/dt \\ dI_2/dt \end{pmatrix}$$

Die Gegeninduktivitäten  $M_{12}$  und  $M_{21}$  lassen sich durch  $M_{ij} = k\sqrt{L_i L_j}$  schreiben, die Induktivitäten  $L_i$  als  $M_{ii} = -L_i$ .

Auf der anderen Seite des Transformators befindet sich ein Widerstand  $R$ .

Da sich der Generator um eine feste Achse dreht können wir die mechanischen Beziehungen skalar schreiben

$$\tau_{\text{ges}} = \tau_{\text{ext}} + \tau_{\text{int}} = \tau_{\text{ext}} - IS_S B_{\text{ext}} \sin(\alpha) = \Theta_1 \dot{\omega} \text{ mit } \dot{\alpha} = \omega$$

als auch die elektromagnetische Kraft

$$\mathcal{EMF} = B\omega S_S \sin(\alpha)$$

Wir können nun die Gleichungen für Generator und Widerstand sowie den Transformator aufstellen. Zweckmäßigerweise setzen wir die elektromagnetischen Kräfte des Generators bzw.

Spannung am Widerstand und die des Transformators gleich. Wir bekommen daraus ein lineares Gleichungssystem für beide  $I$  welches wir lösen müssen. Es ergibt sich für  $I_1$  bzw.  $I_2$

$$I_1 = \frac{L_2 \omega B S_S \sin(\alpha) - k \sqrt{L_1 L_2} R I_2}{L_1 L_2 (1 - k^2)}$$

$$I_2 = \frac{-L_1 R I_2 + k \sqrt{L_1 L_2} \omega \sin(\alpha) B S_S}{L_1 L_2 (1 - k^2)}$$

### 7.3 Umschreiben des Systems in Python zur numerischen Lösung

Wir definieren zuerst einen NumPy-Typ zum speichern der Parameter:

```
[2]: def create_parameter_type(*keys):
      return np.dtype(list((key, np.double) for key in keys))

parameter_type = create_parameter_type('k', 'L1', 'L2', 'B', 'S_S', 'R',
    →'theta', 'tau_ext')
```

Anschließend schreiben wir die rechten Seiten der Differentialgleichungen  $dI_1/dt = \dots$ ,  $dI_2/dt = \dots$  sowie  $d\omega/dt = \dots$  in python-Funktionen:

```
[3]: @numba.njit
def dI1_dt(parameters, omega, alpha, I2):
    denom = parameters["L1"]*parameters["L2"]*(1-parameters["k"]**2)
    part1 = parameters["L2"]*parameters["B"]*parameters["S_S"]*omega*np.
    →sin(alpha)
    part2 = -parameters["k"]*np.
    →sqrt(parameters["L1"]*parameters["L2"])*parameters["R"]*I2
    return (part1 + part2) / denom

@numba.njit
def dI2_dt(parameters, omega, alpha, I2):
    denom = parameters["L1"]*parameters["L2"]*(1-parameters["k"]**2)
    part1 = -parameters["L1"]*parameters["R"]*I2
    part2 = parameters["k"]*np.
    →sqrt(parameters["L1"]*parameters["L2"])*parameters["B"]*parameters["S_S"]*omega*np.
    →sin(alpha)
    return (part1 + part2) / denom

@numba.njit
def domega_dt(parameters, I_1, alpha):
    return (parameters["tau_ext"]-(parameters["S_S"]*parameters["B"])*I_1*np.
    →sin(alpha)) / parameters["theta"]
```

Wir wollen die Variablen in einem Array zusammenfassen, mit der folgenden Indexzuordnung:

```
[4]: def create_mapping_type(*keys):
      return np.dtype(list((key, np.uint) for key in keys))
```

```

def initialize_mapping(mapping_type):
    return np.array([tuple(range(len(mapping_type.fields))),
    ↳dtype=mapping_type)[0]

def show_mapping(mapping):
    for field in mapping.dtype.fields:
        print("m[\"{}\"]={}".format(field,m[field]))

mapping_type = create_mapping_type("I1","I2","omega","alpha","t")
m = initialize_mapping(mapping_type)
show_mapping(m)

```

```

m["I1"]=0
m["I2"]=1
m["omega"]=2
m["alpha"]=3
m["t"]=4

```

Damit lässt sich besser lesbar auf die Inhalte der Variablen zugreifen, z.B. `variables[m["I1"]]` anstatt `variables[0]`

## 7.4 Definition der numerischen Integration

Jetzt definieren wir eine Funktion, welche die rechten Seiten der DGLs zusammenfasst:

```

[5]: @numba.njit
def f(parameters, variables, t):
    dI1 = dI1_dt(parameters, variables[m["omega"]], variables[m["alpha"]],
    ↳variables[m["I2"]])
    dI2 = dI2_dt(parameters, variables[m["omega"]], variables[m["alpha"]],
    ↳variables[m["I2"]])
    domega = domega_dt(parameters, variables[m["I1"]], variables[m["alpha"]])
    dalpha = variables[m["omega"]]
    variables[m["I1"]]=dI1
    variables[m["I2"]]=dI2
    variables[m["omega"]]=domega
    variables[m["alpha"]]=dalpha
    variables[m["t"]]=1
    return variables

```

Das Differentialgleichungssystem wird mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens integriert. Dieses löst Anfangswertprobleme der Form

$$\frac{d(y(t))}{dt} = f(t, y(t))$$

Wir haben oben bereits  $f$  als python-Funktion definiert. Nun definieren wir eine Funktion um das Runge-Kutta-Verfahren auszuführen. Nähere Details könnt ihr beispielsweise auf [Wikipedia](#) finden.

```
[6]: #rk4
@numba.njit
def step(parameters, variables, t, dt):
    oldvar = variables.copy()
    k1 = f(parameters, variables.copy(), t)
    k2 = f(parameters, variables+dt/2*k1, t+dt/2)
    k3 = f(parameters, variables+dt/2*k2, t+dt/2)
    k4 = f(parameters, variables+dt*k3, t+dt)
    newvariables = variables + dt * (1/6*k1 + 1/3*k2 + 1/3*k3 + 1/6*k4)
    if not np.array_equal(oldvar, variables):
        raise Exception("variables change where they should be constant or 'not_
→a number' error")
    return newvariables
```

Die Funktion simulate führt n Schritte der Schrittweite dt aus und speichert alle nr Schritte das Ergebnis in einer Liste.

```
[7]: @numba.njit
def simulate(parameters, variables, n, nr, dt):
    result=[]
    x = variables.copy()
    t = 0
    for i in range(n):
        if i%nr == 0:
            result.append(x.copy())
        x = step(parameters, x, t, dt)
        t += dt
    return result
```

## 7.5 Ausführen der Rechnung mit gewählten Parametern

Wir legen die Parameter fest:

```
[8]: parameters=np.zeros(1,dtype=parameter_type)[0]
parameters["k"]=0.97
parameters["L1"]=3
parameters["L2"]=3
parameters["B"]=1
parameters["S_S"]=1
parameters["R"]=0.1
parameters["theta"]=100
parameters["tau_ext"]=1
```

Dann erstellen wir ein Array für die Parameter. Wir können so auch die Startwerte festlegen:

```
[9]: variables=np.zeros(len(m))
variables[m["alpha"]]=np.pi/2
```

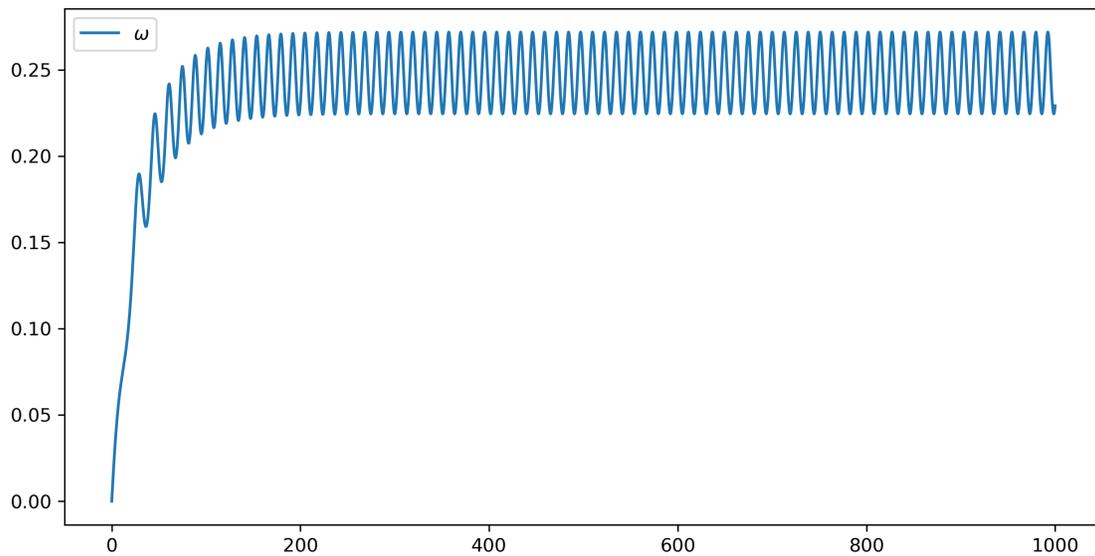
Nun können wir die Berechnung starten und das Ergebnis als NumPy-Array in `res` speichern.

```
[10]: res=np.array(simulate(parameters, variables, n=1000000, nr=100, dt=0.001))
```

## 7.6 Plotten der Ergebnisse

Wir plotten nun  $\omega$

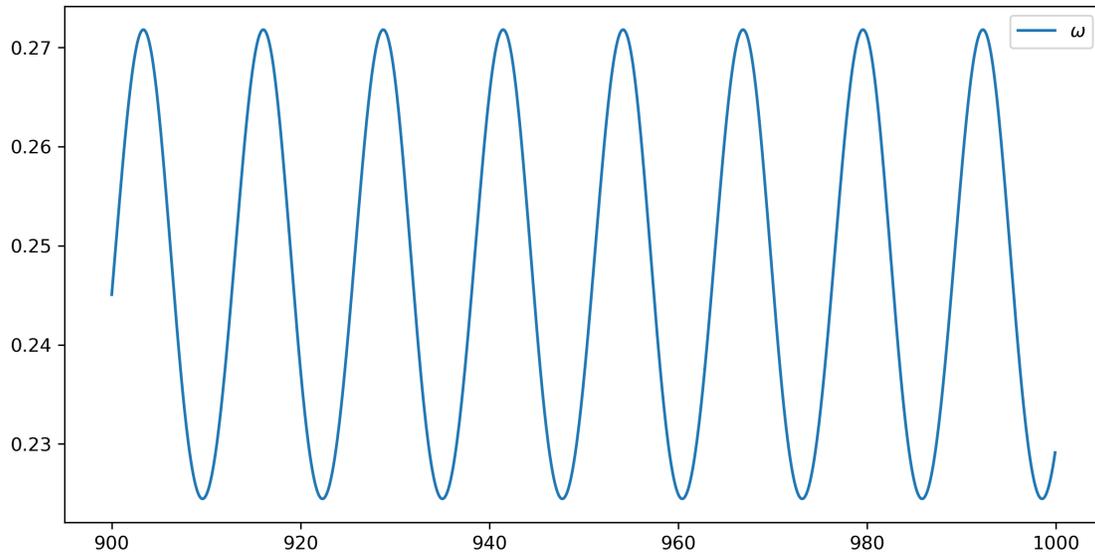
```
[11]: %matplotlib inline
plt.plot(res[:,m["t"]],res[:,m["omega"]],label="$\\omega$")
plt.gcf().set_size_inches(10,5)
plt.legend();
```



Wir schneiden das Ende aus um die Variablen besser beobachten zu können.

```
[12]: res_end = res[9000:]
```

```
[13]: %matplotlib inline
plt.plot(res_end[:,m["t"]],res_end[:,m["omega"]],label="$\\omega$")
plt.gcf().set_size_inches(10,5)
plt.legend();
```



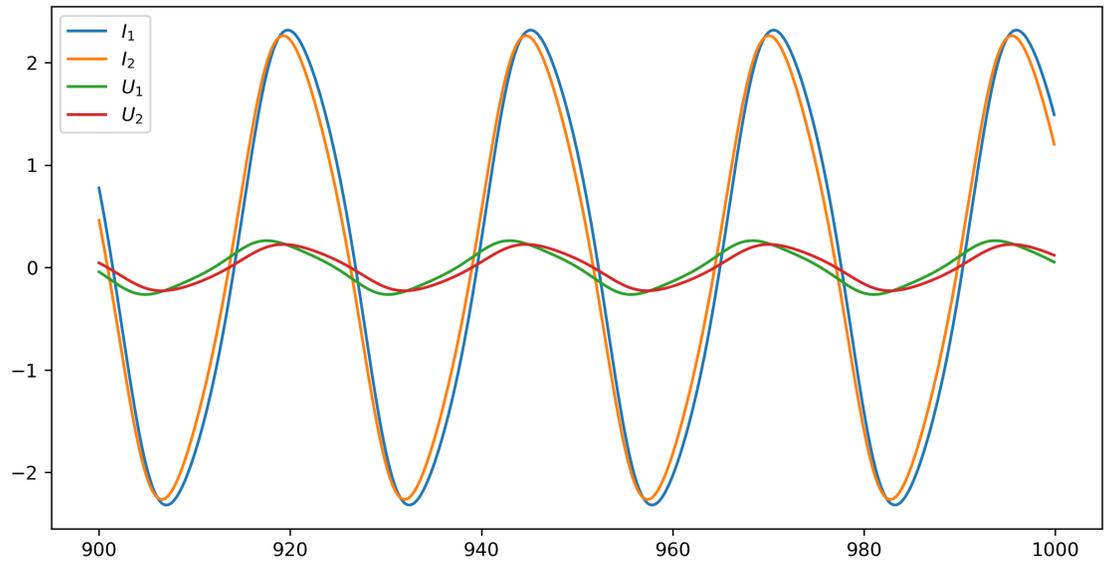
Um die Spannungen zu plotten müssen wir sie erst ausrechnen:

```
[14]: def U1(parameters,result):
        return parameters["B"]*result[:,m["omega"]]*parameters["S_S"]*np.sin(result[:,m["alpha"]])

def U2(parameters, result):
    return parameters["R"]*result[:,m["I2"]]
```

Und plotten dann die Ströme zusammen mit den Spannungen

```
[15]: %matplotlib inline
plt.plot(res_end[:,m["t"]],res_end[:,m["I1"]],label="$I_1$")
plt.plot(res_end[:,m["t"]],res_end[:,m["I2"]],label="$I_2$")
plt.plot(res_end[:,m["t"]],U1(parameters,res_end),label="$U_1$")
plt.plot(res_end[:,m["t"]],U2(parameters,res_end),label="$U_2$")
plt.gcf().set_size_inches(10,5)
plt.legend();
```



## 8 Vorlage für Programmierung: Generator mit komplexer Impedanz

Als Beispiel wird ein System aus Generator und Parallelschaltung von Widerstand und Induktivität modelliert und gelöst.

### 8.1 Import der benötigten Pakete

- NumPy zum Rechnen
- Matplotlib zum plotten
- Numba zur schnelleren Ausführung der Integration

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numba
```

### 8.2 Beschreibung des Systems

Das System lässt sich wie folgt beschreiben:

An einem Generator wirkt ein konstantes Drehmoment  $\tau_{\text{ext},1}$ . Durch die elektromotorische Kraft kann man das Gesamtdrehmoment eines Generators schreiben als

$$\tau_{\text{ges}} = \tau_{\text{ext}} + \tau_{\text{int}} = \tau_{\text{ext}} + IS_S \times \mathbf{B}_{\text{ext}} = \Theta \cdot \dot{\omega}$$

wobei  $S_S = N\pi R^2 \mathbf{n}$  der Spulenflächenvektor ist. Die durch die Flussänderung bei Drehung des Generators entstehende elektromotorische Kraft in Richtung des Leiters lässt sich schreiben als

$$\mathcal{EMF} = -\mathbf{B}_{\text{ext}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}_S)$$

Der Generator  $G$  ist mit einem komplexen Widerstand, einer Parallelschaltung aus Widerstand  $R$  und Spule  $L$ , verbunden.

Da sich der Generator um eine feste Achse dreht können wir die mechanischen Beziehungen skalar schreiben

$$\tau_{\text{ges}} = \tau_{\text{ext}} + \tau_{\text{int}} = \tau_{\text{ext}} - IS_S B_{\text{ext}} \sin(\alpha) = \Theta_1 \dot{\omega} \text{ mit } \dot{\alpha} = \omega$$

als auch die elektromagnetische Kraft

$$\mathcal{EMF} = B\omega S_S \sin(\alpha)$$

Die Stromrichtung ist so definiert, dass bei positivem Spannungsabfall am Widerstand auch ein positiver Strom fließt.

Wir können nun die Gleichungen für Generator und Widerstand sowie den Transformator aufstellen. Zweckmäßigerweise setzen wir die elektromagnetischen Kräfte des Generators und Spannung am komplexen Widerstand gleich. Wir bekommen daraus ein System von Differentialgleichungen:

$$U_L = L\dot{I}_L = U_G$$

$$U_R = RI_R$$

$$\begin{aligned}
U_G &= B\omega S_S \sin(\alpha) \\
I &= I_L + \frac{U_G}{R} \\
\tau_{\text{ext}} - IS_S B \sin(\alpha) &= \Theta_1 \dot{\omega} \\
\dot{\alpha} &= \omega
\end{aligned}$$

bzw. zusammengefasst

$$\begin{aligned}
\dot{I}_L &= \frac{U_G}{L} \\
\dot{\omega} &= \frac{\tau_{\text{ext}} - (I_L + \frac{U_G}{R})S_S B \sin(\alpha)}{\Theta_1} \\
\dot{\alpha} &= \omega
\end{aligned}$$

mit  $U_G = B\omega S_S \sin(\alpha)$

### 8.3 Exkurs: Prüfen der Vorzeichen

Ohne externes Drehmoment  $\tau_{\text{ext}}$  können wir schreiben:

$$-IS_S B_{\text{ext}} \sin(\alpha) = -\frac{I}{\omega} \mathcal{EMF}_{\text{Generator}} = \Theta_1 \dot{\omega}$$

Falls wir an den Generator einen Widerstand anschließen muss dieser der elektromotorischen Kraft des Generators entgegenwirken. Die elektromotorische Kraft des Generators führt zu einem Strom  $I$  in die selbe Richtung wie die Kraft, also muss gelten

$$\mathcal{EMF}_{\text{Generator}} - RI = 0$$

Wenn wir nun Umstellen und oben einsetzen erhalten wir

$$-\frac{1}{R\omega} \mathcal{EMF}_{\text{Generator}}^2 = \Theta_1 \dot{\omega}$$

Für positives  $\omega$  wird die linke Seite negativ, der Motor wird verlangsamt, analog für negatives  $\omega$ . Das Vorzeichen stimmt also. Wenn wir definieren dass  $R = \frac{U}{I}$  und oben einsetzen, erhalten wir

$$\mathcal{EMF}_{\text{Generator}} - \frac{U}{I} I = 0$$

Die Spannung am Widerstand ist also gleich der elektromotorischen Kraft am Generator.

### 8.4 Umschreiben des Systems in Python zur numerischen Lösung

Wir definieren zuerst einen NumPy-Typ zum speichern der Parameter:

```
[2]: def create_parameter_type(*keys):
      return np.dtype(list((key, np.double) for key in keys))

parameter_type = create_parameter_type('R', 'L', 'B', 'S_S', 'theta', 'tau_ext')
```

Außerdem wollen wir die Variablen in einem Array zusammenfassen, mit der folgenden Indexzuordnung:

```
[3]: def create_mapping_type(*keys):
        return np.dtype(list((key, np.uint) for key in keys))

def initialize_mapping(mapping_type):
    return np.array([tuple(range(len(mapping_type.fields)))] ,
        ↳dtype=mapping_type)[0]

def show_mapping(mapping):
    for field in mapping.dtype.fields:
        print("m[\"{}\"]={}".format(field,m[field]))

mapping_type = create_mapping_type("IL","omega","alpha","t")
m = initialize_mapping(mapping_type)
show_mapping(m)
```

```
m["IL"]=0
m["omega"]=1
m["alpha"]=2
m["t"]=3
```

Damit lässt sich besser lesbar auf die Inhalte der Variablen zugreifen, z.B. `variables[m["I1"]]` anstatt `variables[0]`

Anschließend schreiben wir die rechten Seiten der Differentialgleichungen  $dI_L/dt = \dots$  sowie  $d\omega/dt = \dots$  in python-Funktionen:

```
[4]: @numba.njit
def UG(parameters, variables):
    return parameters["B"]*variables[m["omega"]]*parameters["S_S"]*np.
        ↳sin(variables[m["alpha"]])

@numba.njit
def dIL_dt(parameters, variables):
    return UG(parameters, variables)/parameters["L"]

@numba.njit
def domega_dt(parameters, variables):
    I_generator = variables[m["IL"]] + UG(parameters,variables)/parameters["R"]
    numerator = parameters["tau_ext"] -
        ↳I_generator*parameters["S_S"]*parameters["B"]*np.sin(variables[m["alpha"]])
    return numerator / parameters["theta"]
```

## 8.5 Definition der numerischen Integration

Jetzt definieren wir eine Funktion, welche die rechten Seiten der DGLs zusammenfasst:

```
[5]: @numba.njit
def f(parameters, variables, t):
```

```

dIL = dIL_dt(parameters, variables)
domega = domega_dt(parameters, variables)
dalpha = variables[m["omega"]]
variables[m["IL"]] = dIL
variables[m["omega"]]= domega
variables[m["alpha"]] = dalpha
variables[m["t"]]=1
return variables

```

Das Differentialgleichungssystem wird mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens integriert. Dieses löst Anfangswertprobleme der Form

$$\frac{d(y(t))}{dt} = f(t, y(t))$$

Wir haben oben bereits  $f$  als python-Funktion definiert. Nun definieren wir eine Funktion um das Runge-Kutta-Verfahren auszuführen. Nähere Details könnt ihr beispielsweise auf [Wikipedia](#) finden.

```

[6]: #rk4
@numba.njit
def step(parameters, variables, t, dt):
    oldvar = variables.copy()
    k1 = f(parameters, variables.copy(), t)
    k2 = f(parameters, variables+dt/2*k1, t+dt/2)
    k3 = f(parameters, variables+dt/2*k2, t+dt/2)
    k4 = f(parameters, variables+dt*k3, t+dt)
    newvariables = variables + dt * (1/6*k1 + 1/3*k2 + 1/3*k3 + 1/6*k4)
    if not np.array_equal(oldvar, variables):
        raise Exception("variables change where they should be constant or 'not_
→a number' error")
    return newvariables

```

Die Funktion simulate führt n Schritte der Schrittweite dt aus und speichert alle nr Schritte das Ergebnis in einer Liste.

```

[7]: @numba.njit
def simulate(parameters, variables, n, nr, dt):
    result=[]
    x = variables.copy()
    t = 0
    for i in range(n):
        if i%nr == 0:
            result.append(x.copy())
            x = step(parameters, x, t, dt)
            t += dt
    return result

```

## 8.6 Ausführen der Rechnung mit gewählten Parametern

Wir legen die Parameter fest:

```
[8]: parameters=np.zeros(1,dtype=parameter_type)[0]
parameters["R"]=1
parameters["L"]=1
parameters["B"]=1
parameters["S_S"]=1
parameters["theta"]=50
parameters["tau_ext"]=1
```

Dann erstellen wir ein Array für die Parameter. Wir können so auch die Startwerte festlegen:

```
[9]: variables=np.zeros(len(m))
variables[m["alpha"]]=0
```

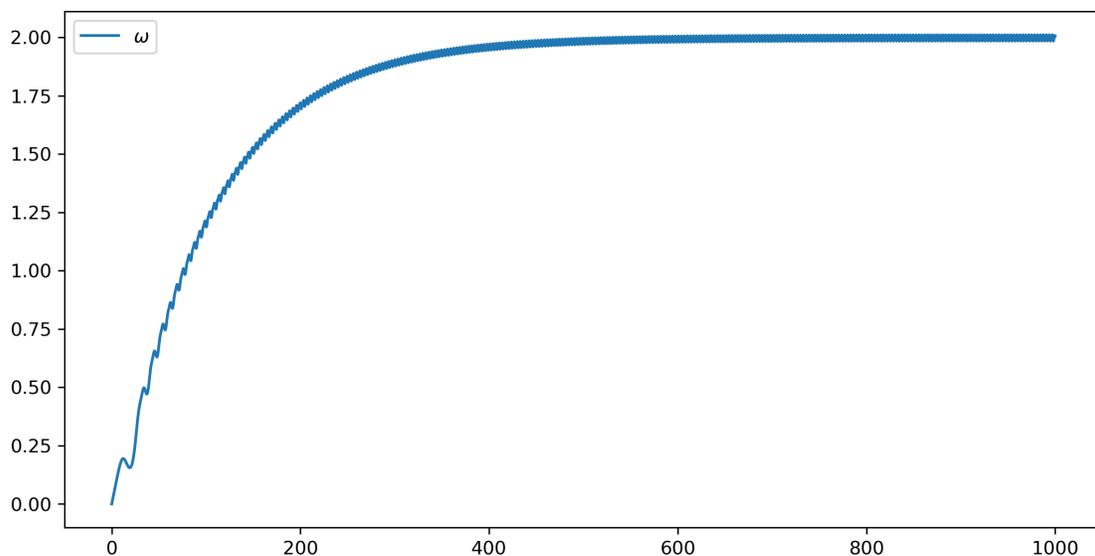
Nun können wir die Berechnung starten und das Ergebnis als NumPy-Array in res speichern.

```
[10]: res=np.array(simulate(parameters, variables, n=1000000, nr=100, dt=0.001))
```

## 8.7 Plotten der Ergebnisse

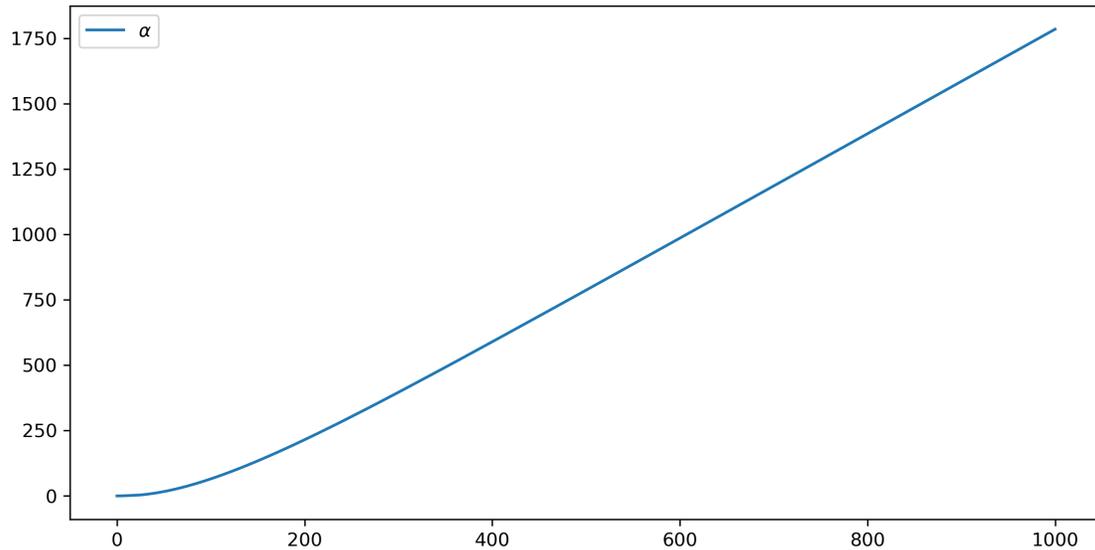
Wir plotten nun  $\omega$

```
[11]: %matplotlib inline
plt.plot(res[:,m["t"]],res[:,m["omega"]],label="$\\omega$")
plt.gcf().set_size_inches(10,5)
plt.legend();
```



Und auch  $\alpha$

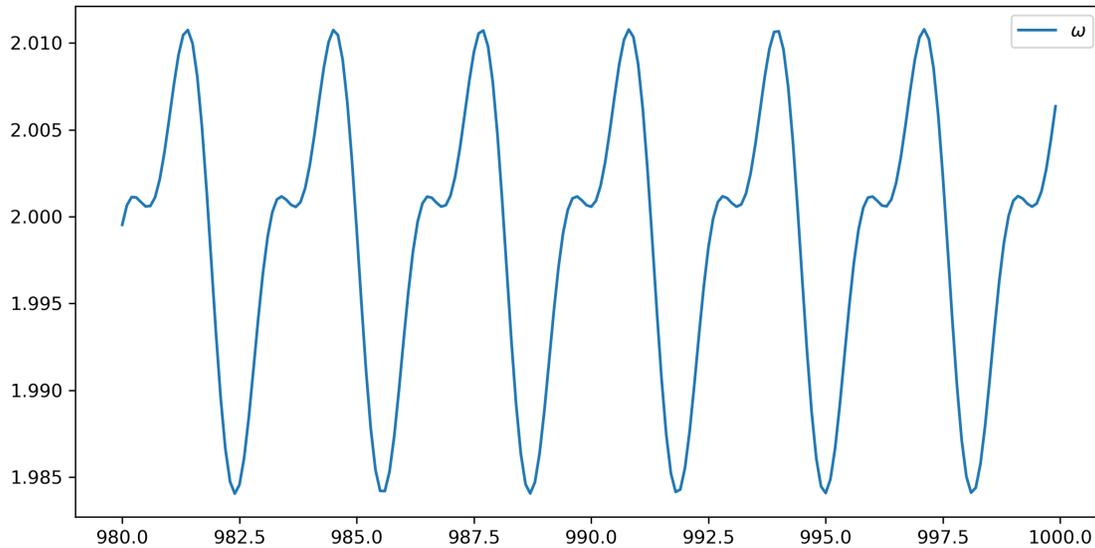
```
[12]: %matplotlib inline
plt.plot(res[:,m["t"]],res[:,m["alpha"]],label="$\\alpha$")
plt.gcf().set_size_inches(10,5)
plt.legend();
```



Wir schneiden das Ende aus um die Variablen besser beobachten zu können.

```
[13]: res_end = res[9800:]
```

```
[14]: %matplotlib inline
plt.plot(res_end[:,m["t"]],res_end[:,m["omega"]],label="$\\omega$")
plt.gcf().set_size_inches(10,5)
plt.legend();
```



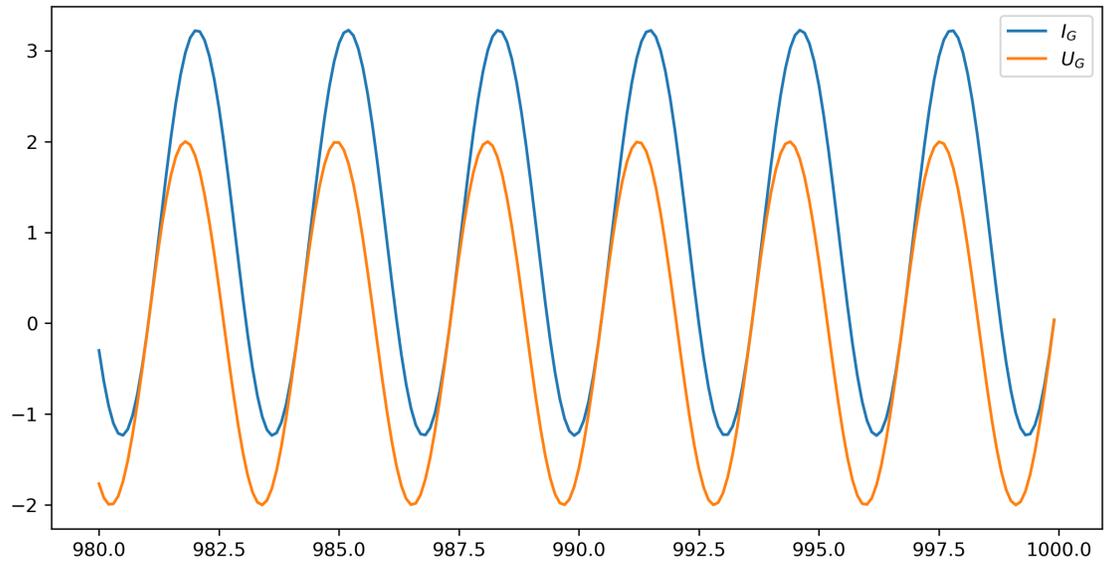
Um die Spannung und den Strom am Generator zu plotten müssen wir sie erst ausrechnen:

```
[15]: def UG_plot(parameters,result):
        return parameters["B"]*result[:,m["omega"]]*parameters["S_S"]*np.sin(result[:,
        →,m["alpha"]])

    def IG_plot(parameters,result):
        return result[:,m["IL"]] + UG_plot(parameters,result)/parameters["R"]
```

Und plotten dann die Ströme zusammen mit den Spannungen

```
[16]: %matplotlib inline
plt.plot(res_end[:,m["t"]],IG_plot(parameters,res_end),label="$I_G$")
plt.plot(res_end[:,m["t"]],UG_plot(parameters,res_end),label="$U_G$")
plt.gcf().set_size_inches(10,5)
plt.legend();
```



## 9 Animierter Plot

### 9.1 Import der benötigten Pakete

- NumPy zum Rechnen
- Matplotlib zum plotten
- IPython.display um die Animation anzuzeigen

```
[1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import animation
from IPython.display import HTML
```

Als einfaches Beispiel plotten wir einen bewegten Sinus.

```
[2]: def f(x,t):
    return np.sin( x-t )
```

Wir berechnen nun die Werte die geplottet werden sollen:

```
[3]: tx = np.linspace(-5, 5, 300, endpoint=False) # x-Werte
tt = np.linspace(0, 2*np.pi, 60) # t-Werte
t, x = np.meshgrid(tt, tx, indexing="ij") # alle Kombinationen beider Werte

f_result = f(x, t)
```

Nun definieren wir eine Funktion, die den gewünschten Plot erstellt. Diese enthält wiederum mehrere Funktionen (ja, das geht in Python) die Matplotlib sagen, was wann gezeichnet werden soll.

```
[4]: def plot_animated(x,data):
    fig, ax = plt.subplots() # Erstellen eines leeren Plots
    lines = plt.plot([], []) # eine einzelne leere Linie zeichnen

    def init():
        """ Initialisieren des Plots """
        ax.set_xlim(x.min(), x.max())
        ax.set_ylim(data.min(), data.max())
        return lines

    def update(frame):
        """ Setzen der neuen Daten für den angegebenen Frame """
        lines[0].set_data(x[frame], data[frame])
        return lines

    ani = animation.FuncAnimation(fig, update, frames=data.shape[0], blit=True,
→init_func=init) # Erstellen der Animation
    html = HTML(ani.to_jshtml(fps=30, default_mode="loop")) # Animation in HTML
→umwandeln
```

```
fig.set_visible(False) # Anzeige des statischen Plots verhindern
fig.set_size_inches(1e-3,1e-3)
return html # Rückgabe der Animation als html
```

```
[5]: %matplotlib inline
plot_animated(x, f_result)
```

```
[5]: <IPython.core.display.HTML object>
```



# Über den Autor

**Thomas Fischer** ist Professor für Experimentalphysik an der Universität Bayreuth. Er studierte an der Technischen Universität München Physik, promovierte am Max Planck Institut für Polymerforschung und der Johannes Gutenberg Universität Mainz, hatte einen Postdoktorandaufenthalt an der University of California Los Angeles, habilitierte an der Universität Leipzig, ging mit einem Heisenberg Stipendium an das Max Planck Institut für Kolloid und Grenzflächenforschung in Potsdam und war Professor für Chemie an der Florida State University in Tallahassee.



# Index

- Aharonov-Bohm-Effekt, 108
- Austauschwechselwirkung, 119
  
- Batterie, 180
- Biot-Savart, 104
- Bohrscher Radius, 60
  
- Coulombgesetz, 2
- Coulombkraft, 2
  
- Debye-Hückel-Gleichung, 58
- Diamagnetismus, 114
- Dielektrikum, 68
- dielektrische Verschiebung, 15
- Dipol
  - Drehmoment, 105
  - Hertzsch, 253
  - Kraft auf, 107
  - magnetische Flussdichte, 99
  - mechanische Energie, 106
  - Potenzial, 32
  - Schicht, 35
  
- elektrisches Feld, 10, 125
- elektrochemisches Potenzial, 176
- Elektrostatik, 13
- Elektrostatisches Potenzial, 27, 62, 95, 196
  - Dipol, 32
  - Koaxialkabel, 235
  - Punktladung, 27
  - Randbedingung, 28
- Energiedichte, 62, 241
  - Dielektrikum, 69
  - externes Feld, 274
  - magnetische, 107
  
- Faradayeffekt, 25
- Ferromagnetismus, 118
  
- Fouriertransformation, 191
- freie Enthalpie, 176
  
- Generator, 131
- Gibbssche Energie, 176
  
- Hall Effekt, 158
- Hertzsch, 253
- Hertzsch, 197
- Himmel
  - Farbe, 267
- Hohlraumleiter, 223
  
- Induktion, 126
  - Induktivität, 140
  - Selbstinduktion, 143
- Innenwiderstand, 180
  
- Kapazität, 61
- Kausalität, 297
- Kirchhoff'schen Gesetze, 164
- Knotenregel, 164
- Koaxialkabel, 232
- Kontinuitätsgleichung, 80
- Kraft
  - Coulombkraft, 2
- Kramers-Kronig-Relationen, 297
  
- Ladung
  - Ladungserhaltung, 79
- Ladungsdichte, 11
- Ladungswolke, 56
- Leitfähigkeit
  - Elektrolyte, 155
  - Glas, 156
  - Halbleiter, 155
  - Metall, 153
- Lorentz Invarianz, 11, 92, 242

- Magnetfeld, 114
- magnetische Flussdichte, 5, 80
- Magnetisierung, 114
- Magnetostatik, 78
- Maschenregel, 164
- Maxwell Gleichungen, 12
- Metall
  - dielektrische Funktion, 208, 210
  - ideales, 20
  - Ohmsches Gesetz, 150
  - Reflexionskoeffizient, 220
- Metamaterial, 285
  - Reflexionskoeffizient, 286
  
- Oberflächenplasmonen, 214
- Ohmsches Gesetz, 150
  - mikroskopisch, 151
- optische Pinzette, 280
  
- Paramagnetismus, 114
- Plasma, 49
- Poisson-Boltzmann-Gleichung, 58
- Polarisation
  - elektrische, 15
- Poynting Vektor, 242
  - externes Feld, 274
  - Hertzscher Dipol, 255
  
- Schwingkreis, 166
- Skineffekt, 212
- Spannungstensor, 236, 241
  - Dielektrikum, 274
  - relativistisch, 242
- Stromdichte, 12
- Superpositionsprinzip, 6
  
- thermodynamischen Gleichgewicht, 176
- thermodynamisches Potenzial, 176
- Thermospannung, 157
  
- Unschärferelation, 59
  
- Vektorpotenzial, 94, 196
  - Draht, 95
  - Ringstrom, 98
  - Spule, 97
  
- Wellengleichung, 197