

I. REHBERG

Eine strömungsakustische Spitzenkatastrophe

Die Zieh- und Hystereseerscheinungen einer transsonischen Pfeife lassen sich durch eine nichtlokale Differentialgleichung modellieren. Dabei liefert die Spitzenkatastrophe ein adäquates Bild zur Beschreibung der Hysterese.

Die selbsterregten Strömungsschwingungen hinter einer unstetigen Querschnittserweiterung stellen eines der meistuntersuchten Schallquellen im transsonischen Bereich dar [1]. Bild 1 zeigt den prinzipiellen Aufbau. Wesentlich für die vorliegende Untersuchung ist, daß die Länge l des Kanals stromabwärts der unstetigen Querschnittserweiterung stufenlos verändert werden kann. Der zweite stetig veränderliche Parameter ist der Druck am Einlaß des Kanals. Der abgestrahlte Schall wird mit einem Mikrophon aufgenommen, mit einer Frequenz von 50 KHz digitalisiert und einem Experimentrechner mit Arrayprozessor zugeführt. Eine genauere Beschreibung des experimentellen Aufbaus findet sich in [2].

Bild 2 zeigt das Ergebnis einer Messung bei konstantem Druck. Hier sind Frequenz und Amplitude des abgestrahlten Schalls gegen die Länge l aufgetragen. Diese beiden Meßgrößen werden durch eine diskrete Fourieranalyse (FFT) aus dem Mikrophonsignal extrahiert. Einem einzelnen Meßpunkt liegen 1024 Daten zugrunde, also eine Meßzeit von 20 msec. Während des Experiments wird die Länge l des Resonators stetig durch einen Motor verändert mit einer Geschwindigkeit von etwa 1 mm/sek. Bei der Länge 160 mm erfolgte die Längenänderung in beide Richtungen, um die hier auftretende Hysterese deutlich zu machen. So erklärt sich die Häufung der Meßpunkte in diesem Bereich. Die Amplitudenachse ist linear in willkürlichen Einheiten skaliert.

Die Interpretation von Bild 2 geht dahin, daß ein selbsterregter Schwinger mit einer Frequenz von etwa 3 KHz durch das Rohr, den Resonator, nur in gewissen Grenzen beeinflußt werden kann. Für den Oszillator existiert ein quantitatives Modell, welches die entstehenden Schwingungen als Folge einer Rückkopplung zwischen dem Stoßenddruck und dem Totwasserdruck beschreibt [3]. Ausgangspunkt meiner Modellierung ist nun der Wunsch, den Resonator in das vorhandene Modell zu integrieren. Der Modellierung des Resonators liegt dabei folgender Gedanke zu Grunde: Vom schwingenden Stoß geht eine Druckwelle aus, die sich als Schallwelle durch das Rohr fortpflanzt und am offenen Ende reflektiert wird. Sie gelangt bis ins Totwasser und überlagert sich dem dort herrschenden Druck, wechselwirkt also nach einer gewissen Laufzeit mit ihrer Entstehungsursache.

Es wird numerisch untersucht, wie ein Laufzeitglied einen selbsterregten Schwinger beeinflußt. Die einfachste Gleichung dieser Art könnte also lauten:

$$A''(t) + m(A^2(t) - 1)A'(t) + A(t) + cA(t - t_2) = 0. \quad (1)$$

Man sollte in diesem Ausdruck die Van der Pol-Gleichung, die einfachste selbsterregte Schwingungsgleichung, und den Laufzeitterm zur Beschreibung des Resonators erkennen. Der Faktor c ist ein Maß für den Grad der Schallreflexion am offenen Rohrende. Obige Gleichung wird in [2] diskutiert. In dieser Schrift soll jedoch ein anderer Schwinger herangezogen werden, der durch

$$A'(t) + A(t - t_1) + A^3(t) = 0 \quad (2)$$

beschrieben wird. Diese nichtlokale Differentialgleichung führt für $t_1 > \pi/2$ zu selbsterregten Schwingungen mit endlicher Amplitude [2].

Bild 3 zeigt den Einfluß der Laufzeit t_2 auf diesen Schwingungstyp. Es wurde also

$$A'(t) + A(t - t_1) + A^3(t) + cA(t - t_2) = 0 \quad (3)$$

numerisch integriert. t_2 ist zunächst 0. Die Integration wird so lange fortgesetzt, bis sich Frequenz und Amplitude des Schwingungsvorgangs hinreichend stabilisiert haben. Dann wird t_2 erhöht und so weiter. Die so gewonnenen Werte sind mit durchgezogenen Linien verbunden. Vom Wert $t_2 = 40$ ab wird die Verzögerungszeit dann schritt-

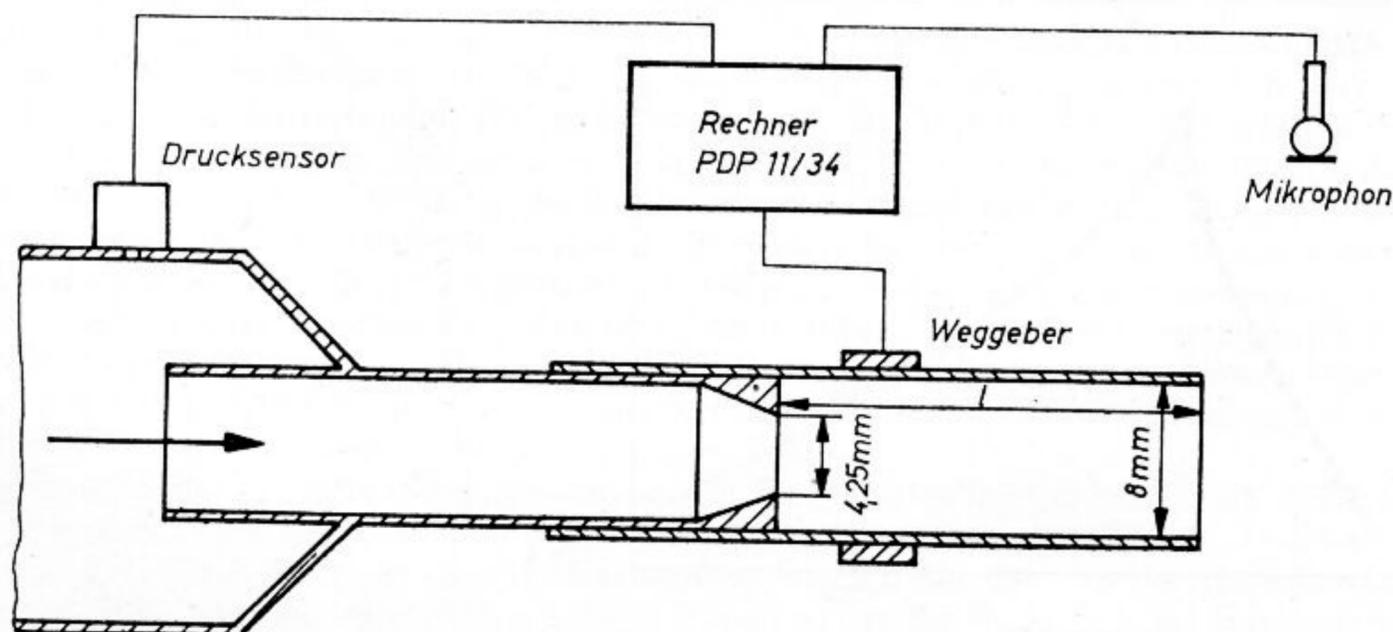
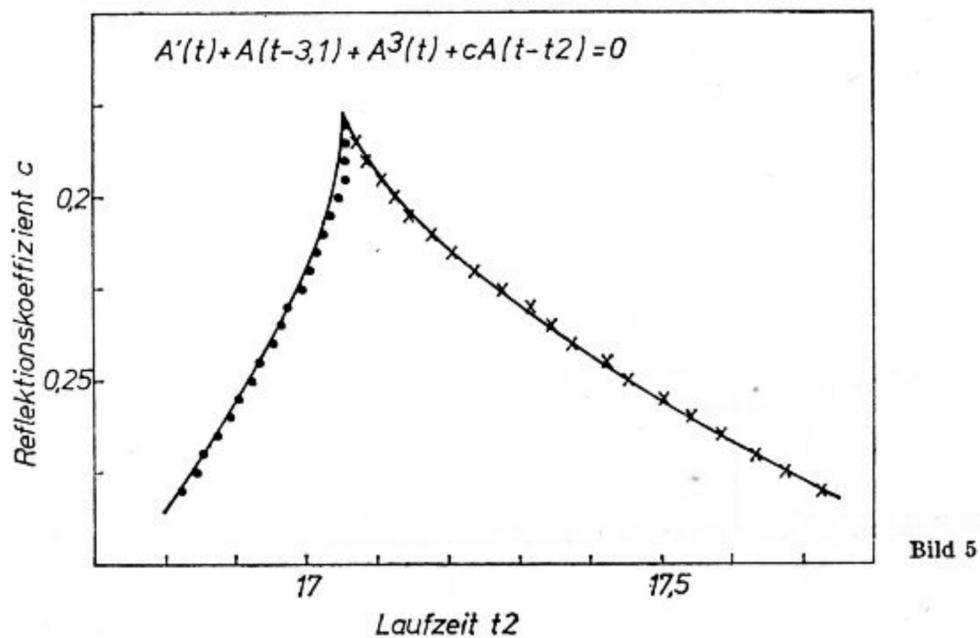
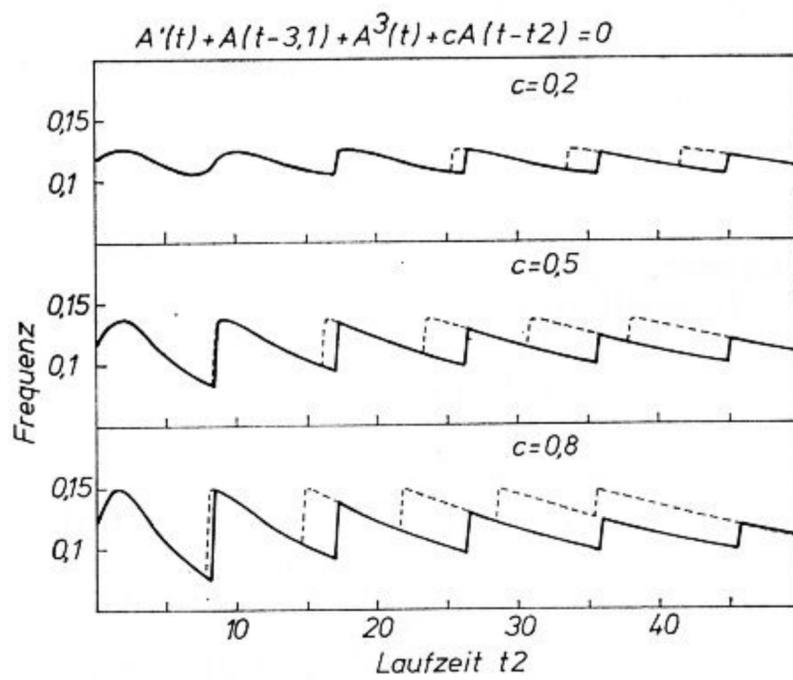
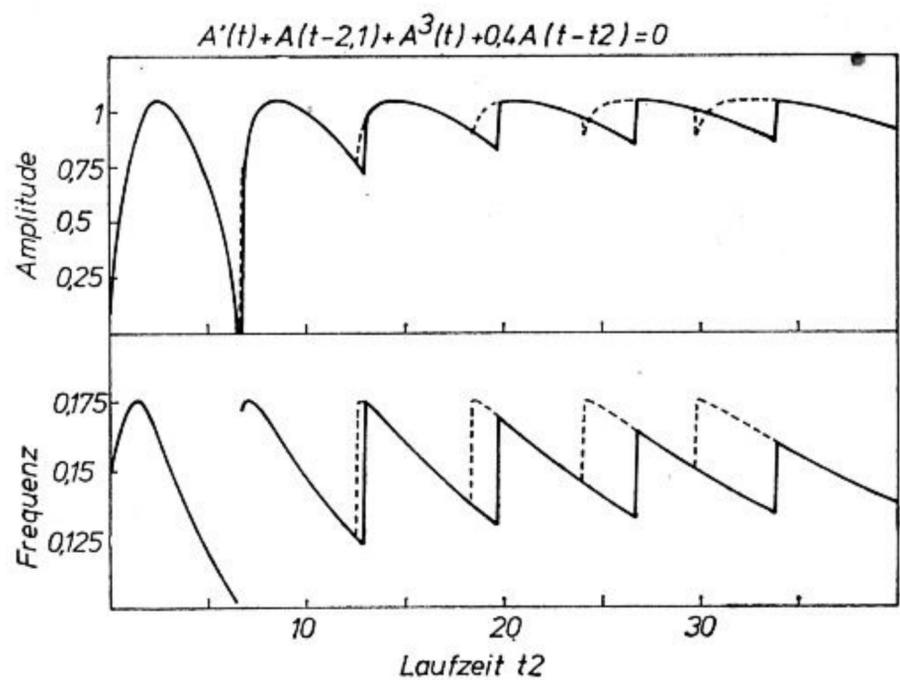
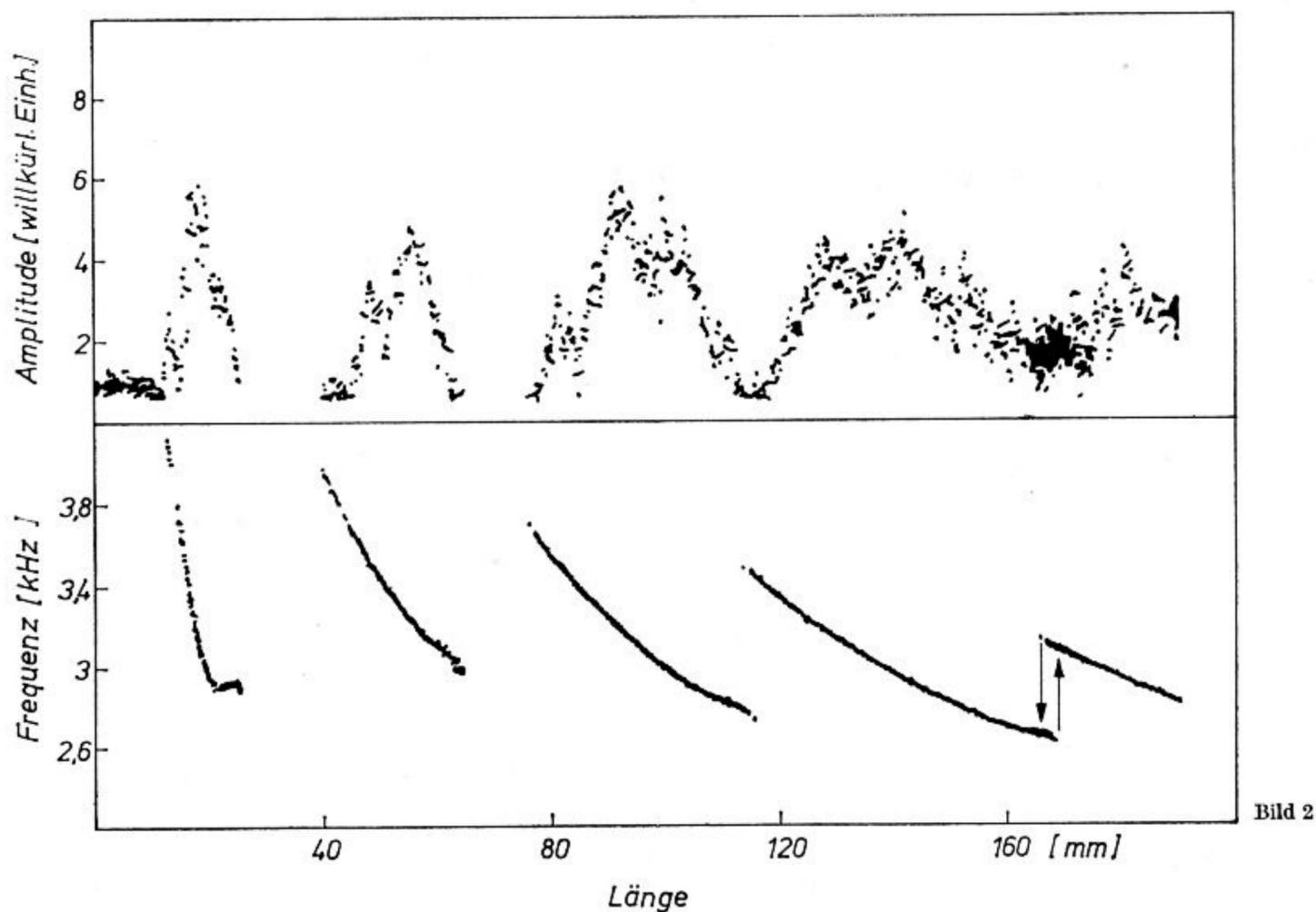


Bild 1



weise verkleinert (gestrichelte Linien). Das Bild 3 zeigt im Vergleich zur Messung 2 qualitative Übereinstimmungen: a) Bei kleinen Werten von t_2 (kleinen l) kann die Schwingung zum Erliegen kommen. b) Bei großen Werten von t_2 (großen l) tritt Hysterese auf.

Diese Hysterese ist der Gegenstand der beiden letzten Bilder. Setzt man in der Gleichung 3 $c = 0$, werden Frequenz und Amplitude des Schwingers nicht mehr von t_2 beeinflusst, es tritt also auch keine Hysterese mehr auf. Wie dieser Übergang vonstatten geht, sieht man im Bild 4, wo der Verlauf der Frequenz für drei verschiedene c -Werte gezeichnet ist. Der Hysteresebereich bei $t_2 = 7$ ist für $c = +0,8$ noch gut erkennbar, für $c = +0,5$ recht schmal und für $c = +0,2$ verschwunden: Die Frequenzkurve verläuft hier stetig. Dieses Verhalten ist im Experiment nachvollziehbar, wenn man das Reflektionsvermögen des Rohrendes verringert [2].

Die Verzweigungslinien für einen Übergang sind im Bild 5 gezeichnet. Der un stetige Sprung zu höheren Frequenzen bei Erhöhung von t_2 ist durch Kreuze, der un stetige Sprung zu tiefen Frequenzen durch Kreise gekennzeichnet. Zwischen diesen beiden Linien liegt der Bereich der Mehrdeutigkeit. Die durchgezogene Linie in diesem Bild ist die Anpassung an eine affine Verzerrung der semikubischen Parabel. Die Katastrophentheorie [4] rechtfertigt diese Anpassung in der Nähe des kritischen Punktes.

Literatur

- 1 ANDERSON, J. S.; JUNGOWSKI, W. M.; HILLER, W. J.; MEIER, G. E. A., Flow oscillations in a duct with a rectangular cross-section, *J. Fluid Mech.* **79** (1977), 769–748.
- 2 REHBERG, I., Eine strömungsakustische Spitzenkatastrophe, Mitteilung Nr. 75 aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsfor schung, Göttingen 1983.
- 3 GRABITZ, G., Modellrechnungen zur Entstehung selbsterregter Schwingungen in einem Überschallkanal mit stufenförmiger Quer schnittserweiterung, *ZAMM* **58** (1978), T 273–T 275.
- 4 POSTON, T.; STEWART, I., *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, London, San Francisco, Melbourne 1978.

Anschrift: Dr. I. REHBERG, UCSB, Dept. Physics, Santa Barbara, CA 93106, USA

ZAMM 64, T 221 – T 222 (1984)

W. ROTT

Zur numerischen Behandlung der Randbedingungen von ein- und zweidimensionalen instationären Strömungen

Bei ein- oder mehrdimensionalen instationären kompressiblen Strömungsproblemen, die mit expliziten Lax-Wendroff- oder Mac-Cormack-Verfahren berechnet werden sollen, muß man zumeist mehr numerische Randwerte vorschreiben als durch das sachgemäß gestellte zu lösende Anfangs-Randwertproblem vorgegeben sind. Dadurch können in der Nähe der Ränder numerische Oszillationen entstehen, die auch zu einer Instabilität der Rechnung führen können. Daher muß an den Rändern anders gerechnet werden als im Strömungsfeld selbst, wozu die Grundgleichungen auf die charakteristischen Richtungen transformiert werden müssen. Beim einfachsten, expliziten Differenzenverfahren im Rechtecknetz werden die Zeitableitungen nun durch Vorwärtsdifferenzen und die Ortsableitungen durch Vorwärts- oder Rückwärtsdifferenzen, je nachdem, ob die reellen Eigenwerte positiv oder negativ sind, ersetzt, ein Verfahren erster Ordnung Genauigkeit, das auf COURANT, ISAACSON und REES [1] zurückgeht. Zusammen mit den aktuellen Vorschriften am Rand wird ein Iterationsverfahren notwendig, aus dem sich die fehlenden Werte des Lösungsvektors des Lax-Wendroff-Verfahrens am Rand eindeutig bestimmen lassen.

Im eindimensionalen Fall sind die Randbedingungen in der Form

$$\mathbf{F}(p, \rho, e, u, t) = 0, \quad p = p(e, \rho) \quad (1), (2)$$

mit p als Druck, ρ als Dichte, e als spez. innerer Energie, u als Strömungsgeschwindigkeit und t als Problemzeit sachgemäß gestellt, worin \mathbf{F} eine Vektorfunktion mit r Komponenten ist, entsprechend der Anzahl der von außen in das Strömungsgebiet eintretenden Charakteristiken [2], [3]. Dabei ist bei k Grundgleichungen $0 \leq r \leq k$; im eindimensionalen kompressiblen Fall ist $k = 3$. Gleichung (2) ist die thermodynamische Zustandsgleichung. Mit (1), (2) und den $k - r$ aus dem Strömungsgebiet kommenden Charakteristiken, entlang denen das erwähnte einfache Differenzenverfahren nach COURANT-ISAACSON-REES verwendet werden kann, ist die numerische Lösung in den Gitterpunkten am Rand und damit die gesamte numerische Lösung eindeutig bestimmt.

Bei einer räumlichen Dimension ergeben sich jetzt vier mögliche Randbedingungen: 1. $r = 0$: Überschall-Ausströmen (Der Strömungszustand am Rand ist vollständig durch die Strömung im Innern bestimmt – Randdifferenzenformeln.); 2. $r = 1$: Unterschall-Ausströmen; 3. $r = 2$: Unterschall-Einströmen und 4. $r = 3$: Überschall-Einströmen (Alle Werte am Rand sind von außen vorgegeben.).

Als Beispiel wird das Unterschall-Einströmen für die Randbedingung behandelt, daß sich stromauf ein großes Rohr oder Kessel mit dem Querschnitt $F \gg f$ (f Rohrquerschnitt) befindet (Bild 1). Dazwischen ist ein Strömungsbegrenzer mit dem Querschnitt αf ($\alpha < 1$) angeordnet, so daß ein Carnotscher Stoßverlust entsteht. Liegt kein Blockieren der Strömung im engsten Querschnitt 1 vor, so ist die Strömung bei ausreichender Unterkühlung im

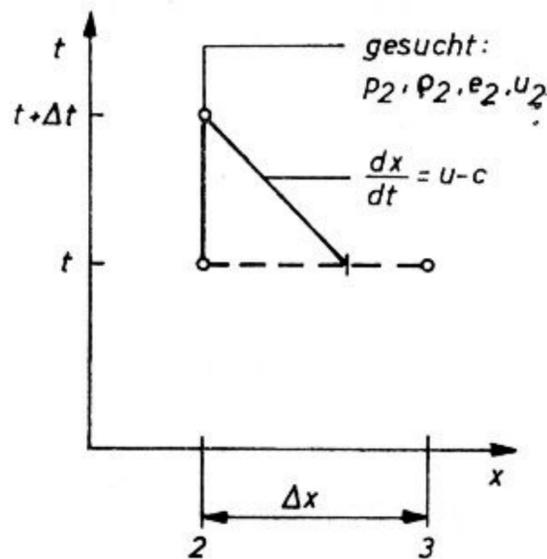
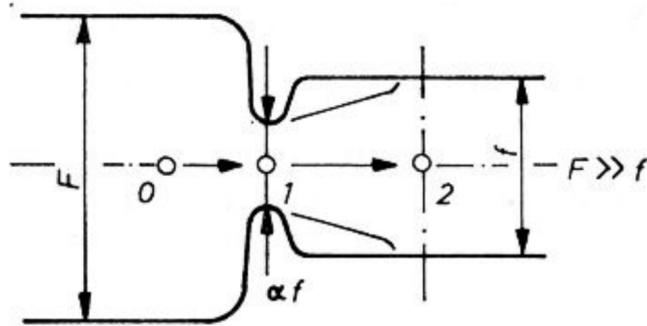


Bild 1. Zum Unterschall-Einströmen mit Carnotschem Stoßverlust

Kessel auch im Querschnitt 2 unterkühlt, und es gelten von Stelle 0 bis Stelle 2 die quasistationäre inkompressible Strömungsgleichung

$$p_2 \cong p_0 - \rho_0 u_2^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} \right) \quad (3)$$

und die diskretisierte Verträglichkeitsbedingung entlang $(dx/dt) = u - c$ (Bild 1):

$$-p_2 + (\rho c)_{2,n} u_2 = K_n. \quad (4)$$

Hierin ist c die örtliche Schallgeschwindigkeit, n die Anzahl der Zeitschritte bis t und K_n eine Abkürzung, die nur Werte in den Gitterpunkten 2 und 3 zur Zeit t enthält. Gesucht sind die Werte p_2 , ρ_2 , e_2 und u_2 am Rand 2 zur Zeit $t + \Delta t$. Der Druck p_2 und die Einströmgeschwindigkeit u_2 können sofort aus (3) und (4) bestimmt werden. Der thermodynamische Zustand in 2 wird aus folgender einfacher Iteration ermittelt (h_0 Ruheenthalpie im Kessel):

1. spez. Volumen v_2 schätzen;
2. e_2 aus $e_2 = h_0 - p_2 v_2 - u_2^2/2$; (5)
3. Abfrage, ob $p_2 - p(e_2, v_2) = 0$; (2)
— wenn „nein“, geh zurück nach 1.

Bei blockierter Strömung gilt immer noch Unterschall-Einströmen. Die zwei äußeren Randbedingungen sind hier die zeitlich konstant bleibende Einströmrates und die Energiegleichung (5), wobei sich ein ähnliches einfaches Iterationsverfahren am Rand ergibt.

Mit dem beschriebenen Verfahren wurde die instationäre Strömung in einer gebrochen angenommenen Volumenausgleichsleitung eines Druckwasserreaktors mit einer Strömungseinschnürung am Rand untersucht. Dabei traten weder am rechten noch am linken Rand numerische Druckoszillationen auf.

Bei einem zweidimensionalen Strömungsbereich lassen sich die Ein- und Ausströmvorgänge analog zum eindimensionalen Fall numerisch behandeln, wenn man eine Koordinate des Rechennetzes parallel zum Rand wählt und das Sauer'sche Nebencharakteristikenverfahren [4] zugrundelegt. Liegt der Rand z. B. parallel zur y -Achse, so kann beim Unterschall-Ausströmen in einen Raum mit dem Druck p_a der neue Ausströmzustand in den Randpunkten mit Hilfe der Verträglichkeitsbedingungen entlang zweier Nebencharakteristiken in zur y -Achse parallelen charakteristischen Flächenelementen ermittelt werden. Dabei kann man drei Differenzgleichungen aufstellen, da entlang der Teilchenbahn zwei Verträglichkeitsbedingungen gelten. Die fünf Unbekannten p , ρ , e und die Geschwindigkeitskomponenten u und v am Rand sind nun durch die drei diskretisierten Verträglichkeitsbedingungen, die Bedingung $p = p_a$ und die Zustandsgleichung (2) eindeutig bestimmt. Ein analoges Verfahren gilt für Unterschall-Einströmen.

Literatur

- 1 COURANT, R.; ISAACSON, E.; REES, M., *Comm. Pure Appl. Math.* **5**, 243–255 (1952).
- 2 LAX, P., *Comm. Pure Appl. Math.* **7**, 159–193 (1954).
- 3 RUSANOV, V. V.; NAZHESTKINA, E. I., *Proc. of the Third GAMM-Conference on Num. Meth. in Fluid Mech.*, 251–268 (1978).
- 4 SAUER, R., *Nichtstationäre Probleme der Gasdynamik*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1966.

Anschrift: Dr. techn. WALTER ROTT, Kraftwerk Union AG, Hammerbacherstr. 12 + 14, D-8520 Erlangen, BRD