

31. Musterbildung in hydrodynamischen Systemen

Ingo Rehberg

Physikalisches Institut,
Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth

Zusammenfassung:

Die Hydrodynamik ist ein klassisches Gebiet der Physik, welches für viele technische Anwendungen von grundlegender Bedeutung ist. Durch das in den letzten 20 Jahren sehr stark angewachsene Interesse an nichtlinearen Systemen hat sie daneben aber auch als aktives Gebiet der Grundlagenforschung eine Renaissance erlebt. Eine Manifestation nichtlinearer Verhaltensweise in räumlich ausgedehnten Systemen ist die Bildung raum-zeitlicher Strukturen [1]. Für deren Untersuchung bieten hydrodynamische Systeme die experimentell attraktive Möglichkeit, die Komplexität dieser Strukturen durch äußere Parameter in weiten Grenzen kontrollieren zu können. Im Vortrag wird eine Reihe von Strukturbildungsphänomenen aus diesem Gebiet vorgestellt. Dabei sind die Experimente nach wachsender Komplexität angeordnet. Es wird vorwiegend auf die experimentelle Realisierung und die jeweils verwendeten Meßmethoden eingegangen. Die Zusammenstellung beschränkt sich auf Experimente, die einer schwach nichtlinearen Analyse zugänglich sind. Dadurch eröffnet sich die Möglichkeit einer verallgemeinerten Beschreibung dieser Systeme mit Hilfe einer sogenannten Amplitudengleichung, und diese Möglichkeit wird jeweils kurz angedeutet.

1 Charakteristiken einer Instabilität

Beginnen wir mit einem System, welches zwar (im allgemeinen) nicht strukturbildend ist, jedoch sehr geeignet, sich wesentliche Aspekte von Instabilitäten bzw. verallgemeinerten Phasenübergängen vor Augen zu führen: Der bereits im Vortrag von H.Pleiner angesprochene Fréedericksz-Übergang. Bei diesem Experiment wird ein Plattenkondensator aus zwei transparenten Elektroden aufgebaut, und als Dielektrikum ist ein nematischer Flüssigkristall in den Kondensator eingebracht. Die Oberfläche der Platten ist etwa durch mechanisches Reiben in einer Richtung so präpariert, daß der Direktor des Nematen parallel zu den Platten angeordnet ist und eine Vorzugsrichtung aufweist. Man spricht in diesem Fall von planarer Anordnung des Flüssigkristalls. Aufgrund der elastischen Wechselwirkung pflanzt sich die Wirkung der Berandung in das gesamte Volumen des Nematen hinein fort, so daß das Fluid in der gesamten Zelle ausgerichtet wird.

Legt man nun eine Spannung an den planar orientierten Flüssigkristall, hat man eine po-

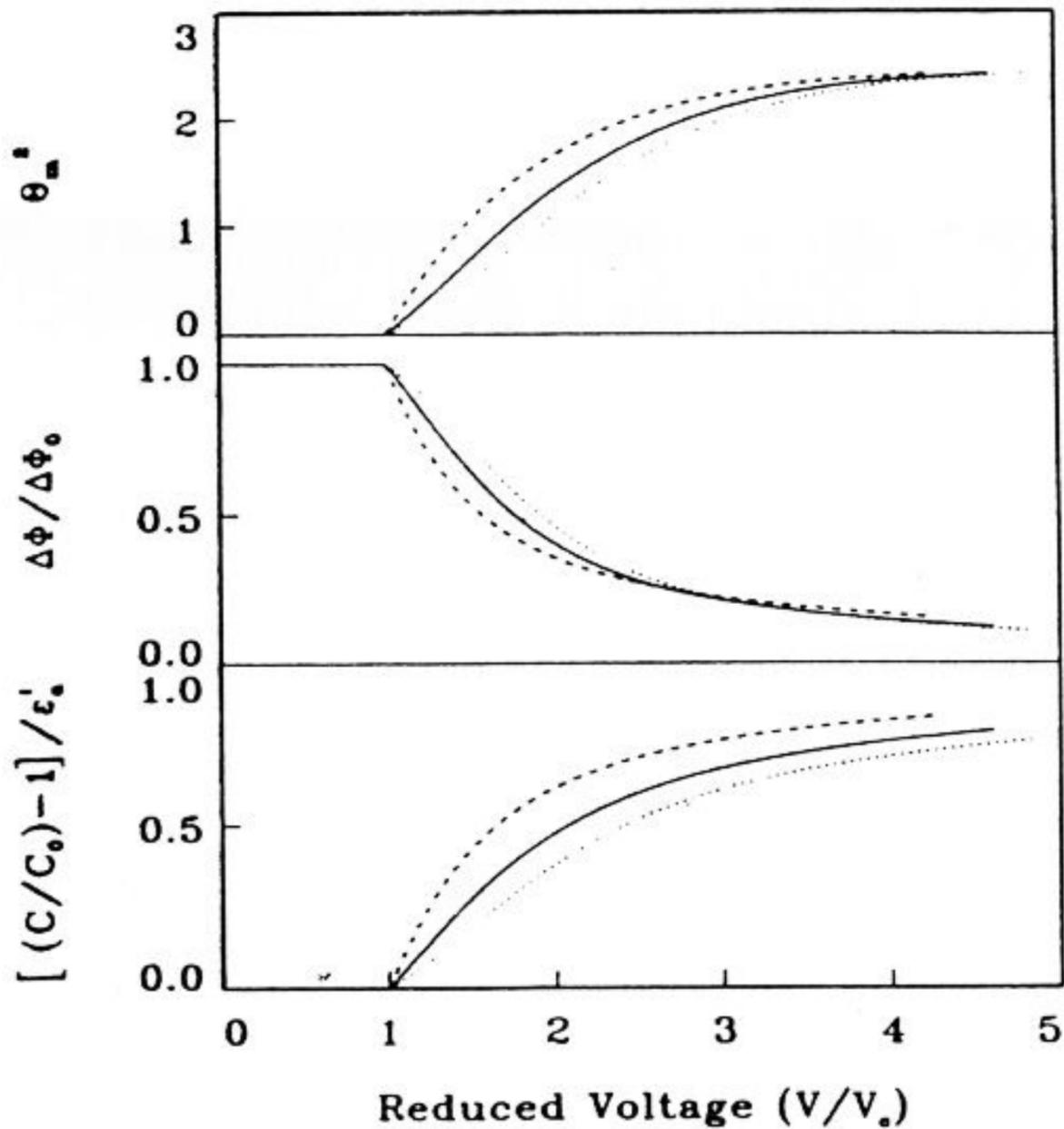


Abbildung 1: Der Fréedericksz-Übergang als Bifurkation.

tentiell instabile Situation vor sich, wenn die Dielektrizitätskonstante in Richtung des Direktors größer ist als senkrecht dazu (man spricht in diesem Fall von positiver dielektrischer Anisotropie). Es gibt also zwei gegenläufige Effekte in der Zelle: Die Randbedingungen favorisieren die planare Anordnung, während das elektrische Feld den Direktor zu drehen versucht. Bei hinreichend großen Feldern wird der Einfluß des elektrischen Feldes überwiegen. Wichtig ist nun, daß die Drehung bei einer genau definierten Stärke des elektrischen Feldes einsetzt, und dies soll anhand der folgenden Messung veranschaulicht werden.

Bei der in Bild 1 gezeigten Messung wurde eine Spannung an die Zelle gelegt und die Kapazität des Plattenkondensators als Funktion der Spannung vermessen [2]. Der Schwellwert für die Deformation des Direktors ist klar zu erkennen, weil oberhalb dieses Schwellwertes die Kapazität anwächst. Alternativ kann man die Amplitude der Direktordeformation auch optisch bestimmen, indem man den Gangunterschied zwischen unterschiedlich polarisierten Lichtstrahlen vermisst, und dies ist im mittleren Teil des Bildes 1 gezeigt.

Die Existenz des Schwellwertes ist eine Manifestation der Symmetriebrechung durch die Instabilität. Der maximale Deformationswinkel in der Mitte der Zelle A kann oberhalb des Schwellwertes sowohl positiv als auch negativ sein. Ein mechanisches Analogon ist das Eulersche Knicklastproblem, bei dem ein senkrecht stehender Stab durch ein an seiner Spitze angebrachtes Gewicht zunehmend belastet wird. Erst beim Überschreiten einer kritischen Last wird der Stab sich biegen, wobei die Richtung der Biegung im Prinzip ebenfalls spontan gewählt wird. Im realistischen Experiment wird jedoch irgend eine Richtung bevorzugt werden, bedingt durch die unvermeidlichen Symmetriebrechungen. Konkret könnte dies beim Flüssigkristall dadurch erfolgen, daß der Winkel des Direktors am Rand nicht perfekt parallel zu der Kondensatorplatte liegt. Man spricht in diesem Fall von einem Pretilt. Dieser ist übrigens für technische Anwendungen in den Flüssigkristallanzeigen (Liquid Crystal Displays, LCD) sehr erwünscht. Eine

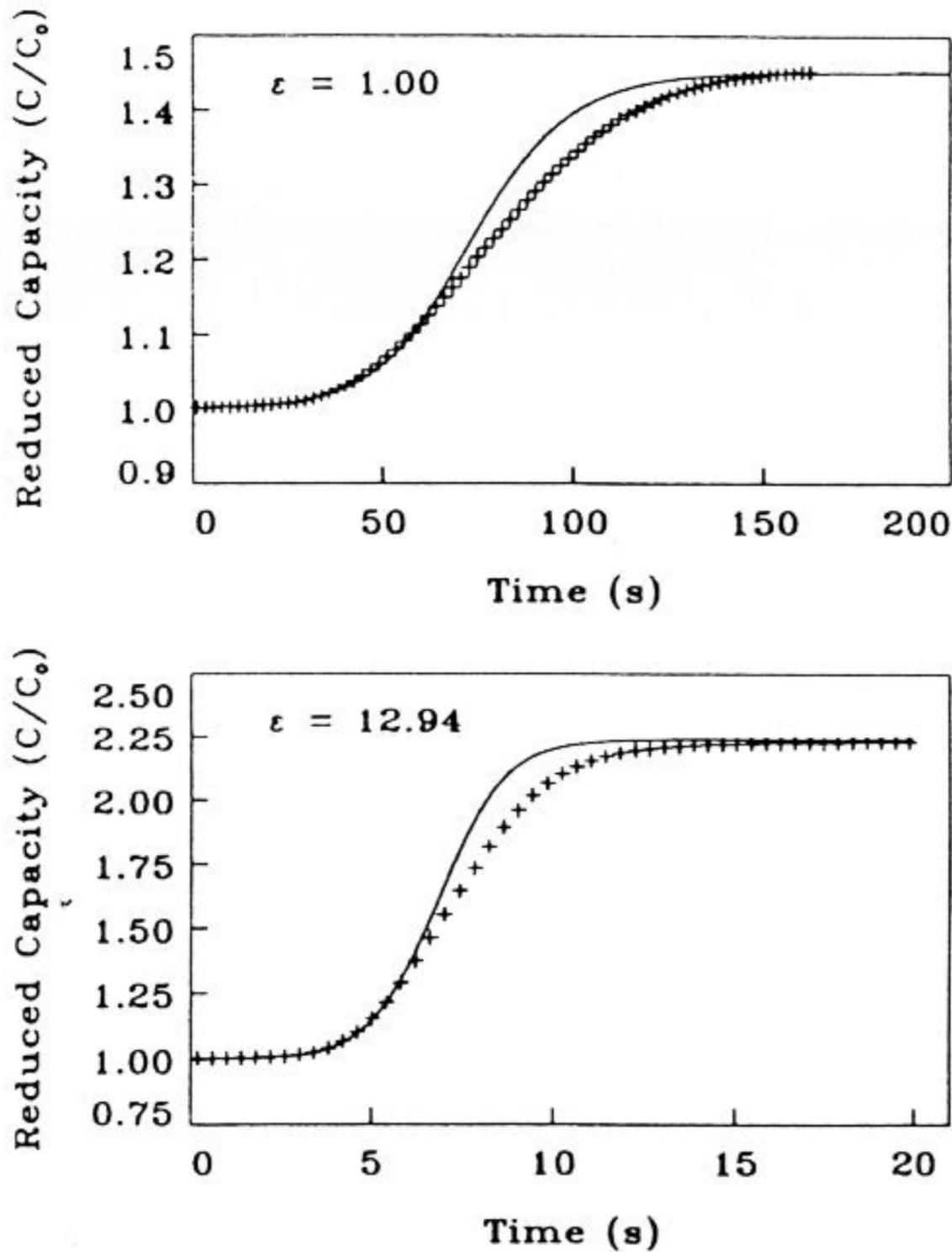


Abbildung 2: Zur Dynamik des Fréedericksz-Übergangs.

Symmetriebrechung dieser Art macht aus einer Bifurkation eine imperfekte Bifurkation.

Um sich die Dynamik des Schaltvorganges vor Augen zu führen, erhöht man die an der Zelle anliegende Spannung schlagartig auf einen überkritischen Wert. Das untenstehende Bild 2 zeigt Meßkurven für $A(t)$ für verschiedene Werte der Spannung[2]. Es ist offensichtlich, daß der Schaltvorgang um so länger dauert, je näher man der Schwellwertspannung kommt. Diesen Sachverhalt bezeichnet man allgemein mit "critical slowing down", ein Begriff, der aus der Gleichgewichtsthermodynamik stammt.

Die wesentlichen Aspekte der hier gemachten Beobachtungen kann man in einer Gleichung zusammenfassen:

$$\partial A(t)/\partial t = \epsilon A(t) - A(t)^3 + A_0$$

Dabei repräsentiert ϵ den Abstand vom Schwellwert gemäß $\epsilon = (V^2 - V_c^2)/V_c^2$, wobei V die an der Zelle anliegende Spannung und V_c der Schwellwert dieser Spannung ist. Durch den Term A_0 ist die Symmetriebrechung des Systems in niedrigster Ordnung berücksichtigt, in einer perfekt symmetrischen Zelle wäre $A_0 = 0$.

Die drei wesentlichen Charakteristika des Übergangs sind also die aus der Symmetriebrechung resultierende Existenz eines Schwellwertes, eine langsame Dynamik in der Nähe Schwellwertes und ein steiles Anwachsen der Gleichgewichtsamplitude oberhalb des Schwellwertes. Dies sind aber auch die Charakteristika eines Phasenübergangs zweiter Art. Der nematische Flüssigkristall

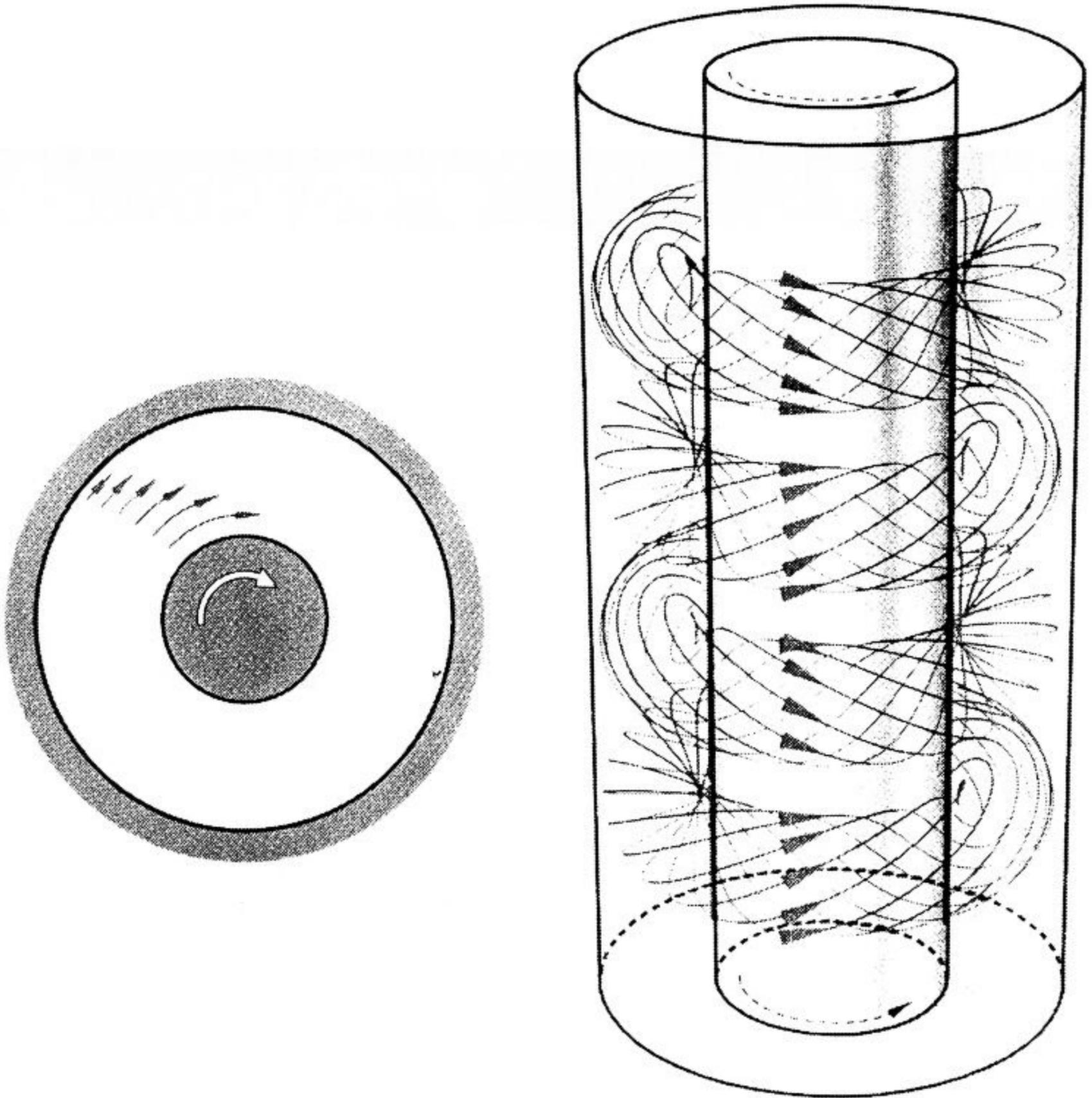


Abbildung 3: Couette-Strömung und Taylor-Wirbel.

erfährt jedoch am Fréedericksz-Übergang keinen Phasenübergang im thermodynamischen Sinne, daher spricht man bei diesem und auch bei den im Folgenden behandelten Instabilitäten von verallgemeinerten Phasenübergängen.

2 Eindimensionale Strukturen

2.1 stationäre periodische Struktur

Zu den bisher demonstrierten Effekten kommt bei den hydrodynamischen Instabilitäten in der Regel noch ein weiterer Aspekt, nämlich die Musterbildung, hinzu. Dies läßt sich an Hand der im Bild 3 skizzierten zylindrischen Couette-Strömung demonstrieren [3]. Übersteigt die Drehfrequenz des Innenzylinders einen kritischen Wert, bilden sich entlang der Zylinderachse periodische Strömungsmuster, die im Bild 3 skizzierten Taylor-Wirbel. Ihre Existenz läßt sich bereits aus einer linearen Stabilitätsanalyse erahnen, deren Ergebnisse im unteren Bild 4 als gestrichelte Linie dargestellt sind [4].

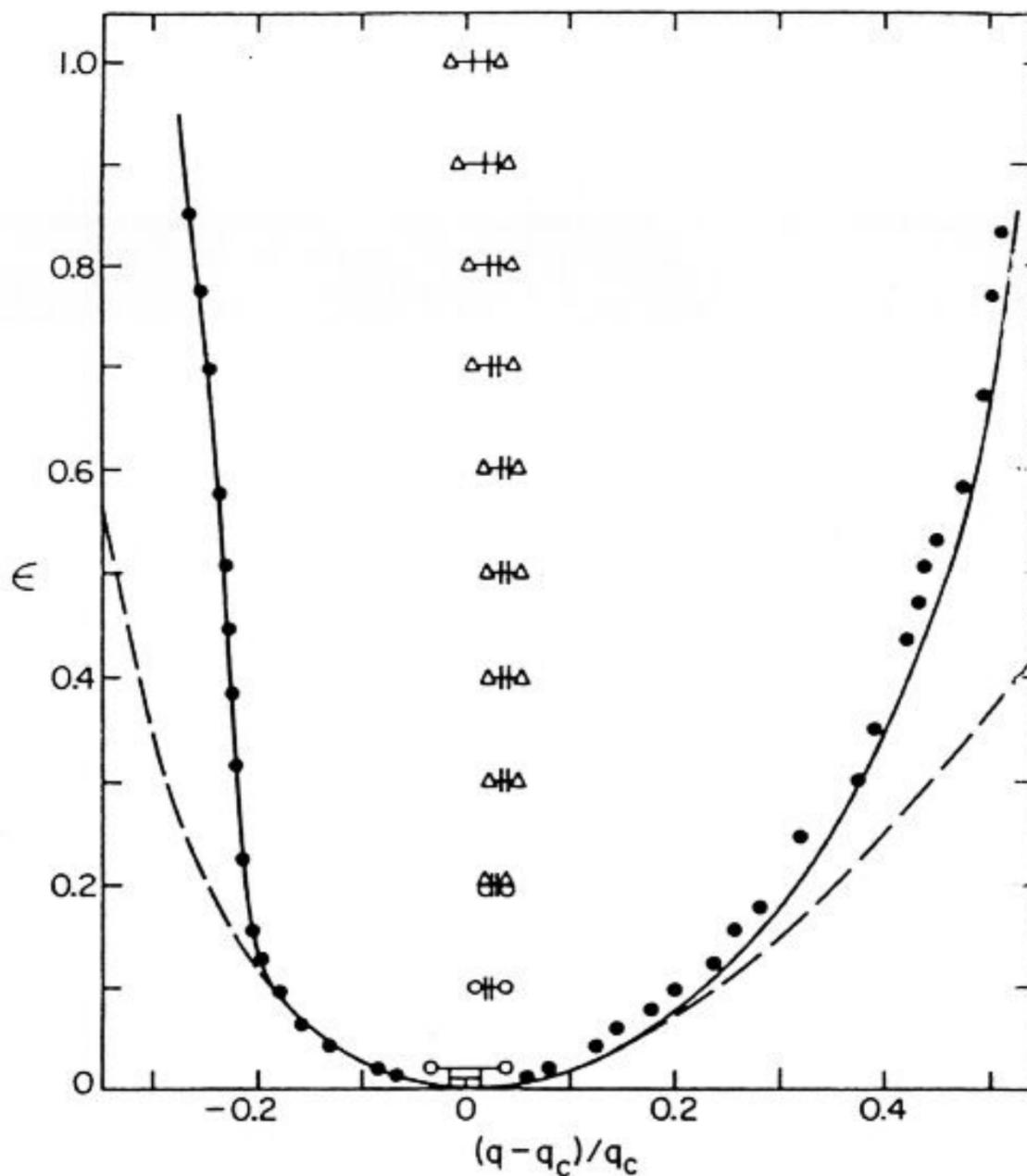


Abbildung 4: Stabilitätsdiagramm der Taylor-Wirbel.

Das Bild 4 bzw. die lineare Analyse erlauben jedoch keinen Aufschluß darüber, welcher Gleichgewichtszustand sich bei überkritischen Werten der Drehfrequenz einstellen wird. Hierzu bedarf es einer nichtlinearen Analyse. Im Fall der Taylor-Wirbel zeigt das Experiment, daß die Amplitude der Wirbel oberhalb der kritischen Drehfrequenz kontinuierlich zunimmt, ganz ähnlich wie der maximale Deformationswinkel im Falle des Fréedericksz-Übergangs. Für die nichtlineare Analyse bedeutet dies, daß eine Potenzreihenentwicklung der Amplitude in einer kleinen Umgebung des Schwellwertes die richtigen Werte für die Amplitude liefern wird. Um die Universalität herauszustellen, erweist es sich im Rahmen dieser schwach nichtlinearen Analyse als günstig, eine Aufspaltung des Geschwindigkeitsfeldes vorzunehmen. Dabei wird das Geschwindigkeitsfeld $v(r,z)$ dargestellt als Realteil des Terms $v(z)\exp(ik_0z)A(z)$, wobei die Funktion $v(z)$ als Eigenfunktion der linearen Stabilitätsanalyse gewonnen wird und k_0 die kritische Wellenlänge darstellt [5]. Dies führt auf die Amplitudengleichung oder verallgemeinerte Ginzburg-Landau Gleichung:

$$\tau_0 \partial_t A = \epsilon A + \xi_{||}^2 \partial_{xx}^2 A - g |A|^2 A$$

Diese Gleichung sieht formal dem Ausdruck zur Beschreibung des Fréedericksz-Übergangs recht ähnlich. Damit beinhaltet sie auch die drei wesentlichen Aspekte des verallgemeinerten Phasenübergangs, die bereits oben im Zusammenhang mit dem Fréedericksz-Übergang diskutiert wurden. Die Interpretation ist allerdings recht verschieden, denn jetzt ist A komplex und repräsentiert nur noch die Einhüllende der nahezu periodischen Struktur. Außerdem enthält die Gleichung einen Diffusionsterm, dessen Bedeutung an Hand der in Bild 5 gezeigten Messung illustriert werden soll [3]. Hier bewirkt die vom Rand induzierte Störung, daß der ganze Apparat bereits bei unterkritischer Rotationsgeschwindigkeit mit Wirbeln angefüllt wird. Die im Bild erkennbare Einhüllende der Geschwindigkeitskurve ist durch die Lösung der Amplitudenglei-

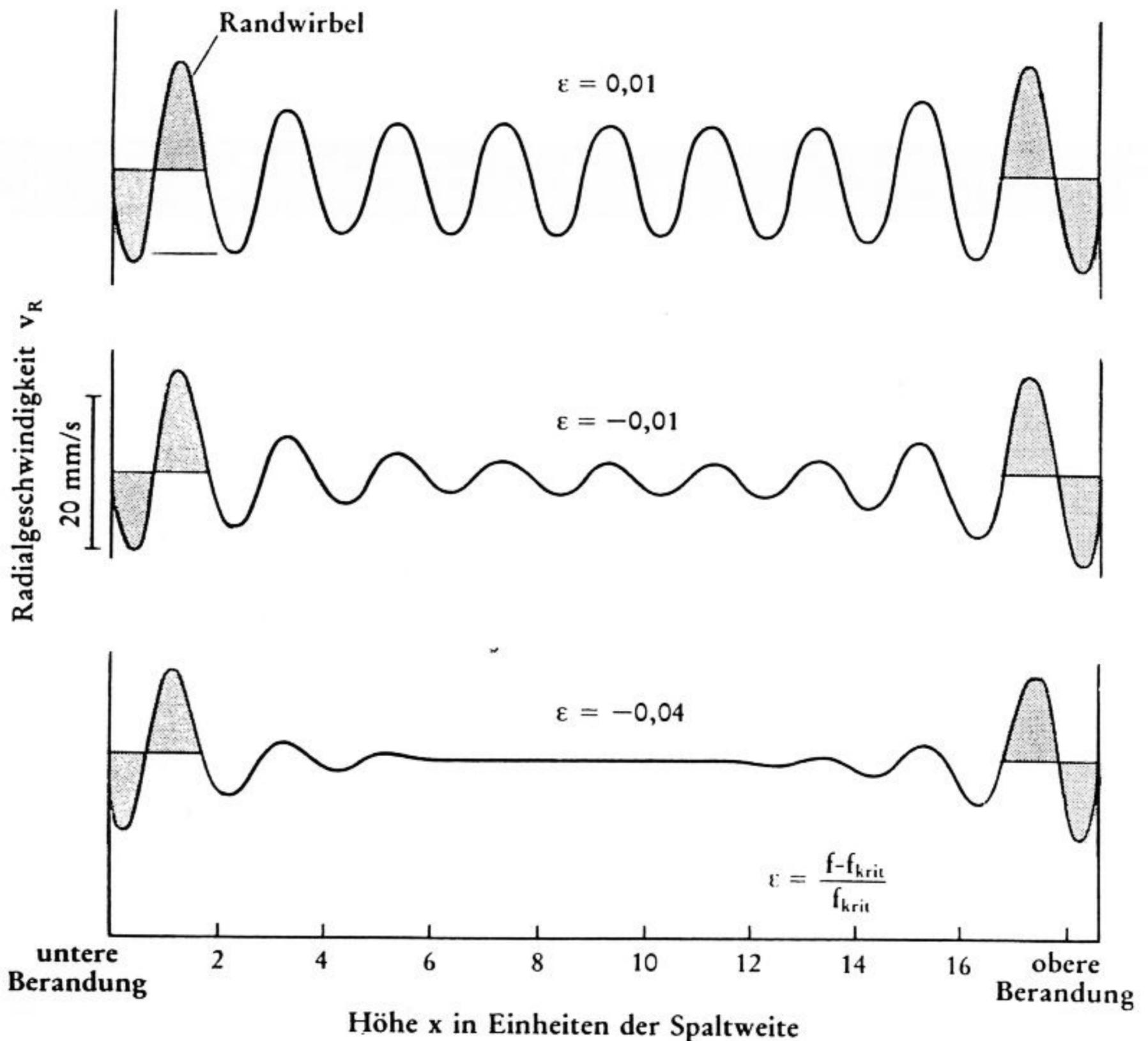


Abbildung 5: Geschwindigkeitsprofil der Taylor-Wirbel dicht am Schwellwert.

chung beschreibbar. Diese liefert damit auch eine Meßvorschrift zur Bestimmung der kritischen Drehfrequenz [6], die ja in dem endlich großen Apparat auf Grund der Störungen durch die Seitenwände nicht ohne weiteres möglich ist.

2.2 Wellenlängenband

Die lineare Stabilitätsanalyse (s. Bild 4) zeigt, daß oberhalb des Schwellwertes für die Bildung periodischer Taylor-Wirbel die Grundstömung gegen ein ganzes Band von Wellenlängen instabil wird. Die Betrachtung dieses Bandes führt zur Frage der Wellenlängenselektion: Welche der Wellenlängen innerhalb der Stabilitätsparabel sind experimentell realisierbar? In der Regel wird man ein Experiment so durchführen, daß man die Drehfrequenz des Innenzylinders langsam erhöht. Bei der kritischen Frequenz stellt sich dann ein periodisches Muster mit der kritischen Wellenlänge ein, und diese ist eindeutig. Erhöht man die Drehzahl, erlauben die Randbedingungen (der Apparat ist ja nicht unendlich lang, sondern hat einen Boden und einen Deckel) keine Veränderung der Wellenlänge. Führt man dagegen einen beweglichen Deckel ein, kann man die Wirbel innerhalb gewisser Grenzen auseinanderziehen oder zusammenquetschen, und

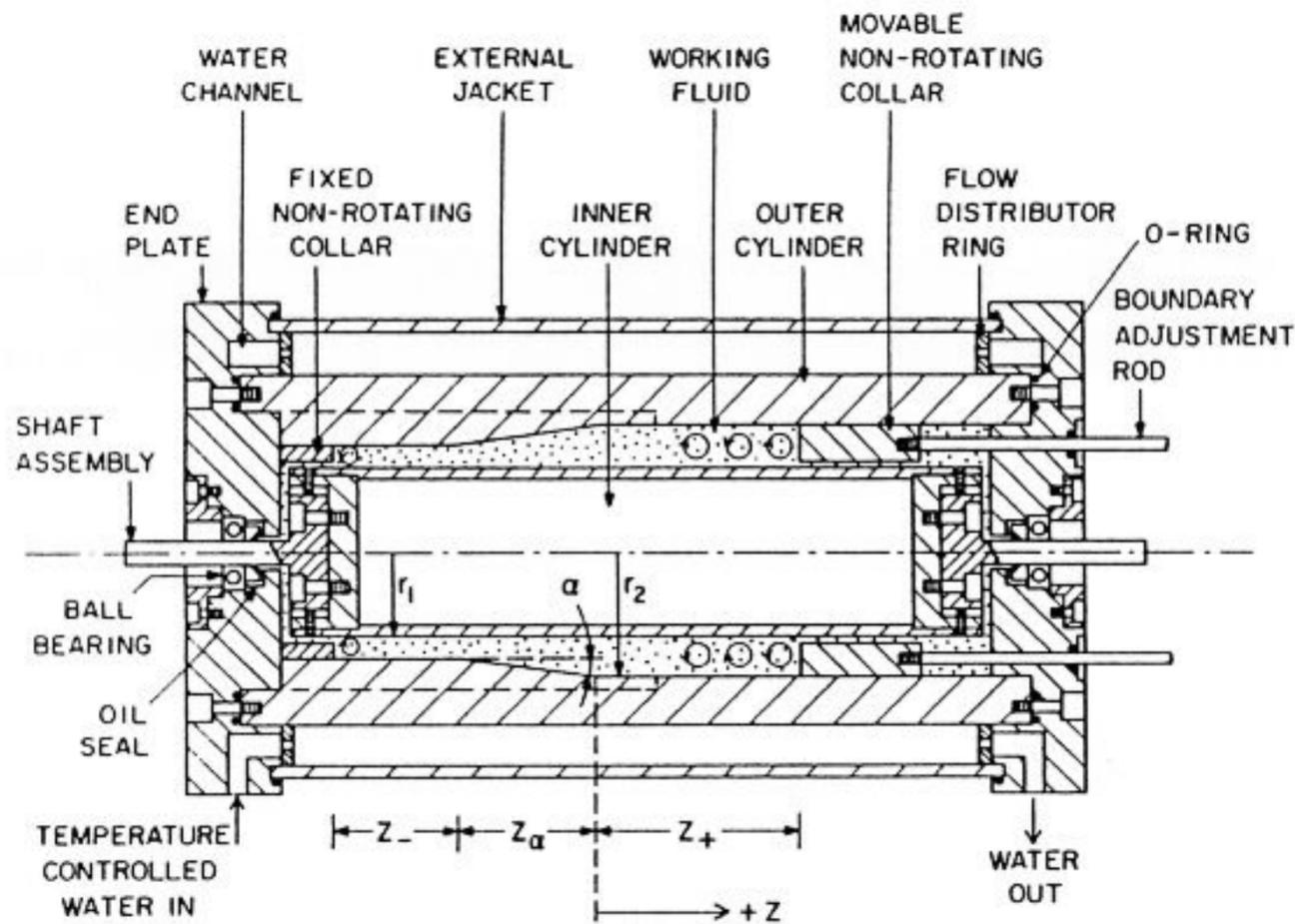


Abbildung 6: Realisation einer Rampe für Taylor-Wirbel.

sie bleiben dennoch stabil. Dies bedeutet, daß die kritische Wellenlänge nicht die einzig stabile im überkritischen Bereich ist.

Andererseits kann man aber auch nicht den gesamten Bereich innerhalb der Instabilitätsparabel auf diese Weise realisieren. Die Wirbel werden vielmehr vor Erreichen der linearen Stabilitätslinie bei einer endlich großen Amplitude instabil. Diese sogenannte Eckhaus-Instabilität kann man ebenfalls aus der Amplitudengleichung herleiten [5]. Ihre experimentelle Bestimmung ist im Bild 4 durch die schwarzen Kreise angedeutet.

Innerhalb des Eckhaus-stabilen Bereiches bleibt jedoch ein ganzes Kontinuum stabiler Wellenzahlen übrig. Jede dieser Wellenzahlen wird durch die passenden Randbedingungen, also die passende Länge des Zylinders, stabilisiert. Es stellt sich die Frage, ob es innerhalb dieses Bandes eine Wellenlänge gibt, welche vom System bevorzugt wird. Die genaue Bedeutung des Wortes bevorzugt ist allerdings schwer zu präzisieren, man hatte wohl zunächst die Vorstellung, daß ohne die Einschränkung durch die Ränder vom System eine bestimmte Wellenlänge ausgewählt würde. Der Wunsch, sich von der Restriktion durch die Ränder zu befreien, führte zur Idee der Rampen: hier wird die Spaltweite kontinuierlich verkleinert, was zu einem räumlich langsamen Verschwinden der Wirbel führt, wie im Bild 6 demonstriert.

Das entsprechende Experiment lieferte ein Ergebnis, welches zunächst intuitiv sehr gut verständlich schien: Ein Verschieben des Deckels der Apparatur kann die Wellenlänge in Gegenwart einer Rampe nicht mehr beeinflussen, wie es in der Messung von Dominguez-Lerma et al. im Bild 6 gezeigt wird. Die zunächst sehr naheliegende Interpretation, mit der hier gefundenen Wellenlänge eine bevorzugte im Sinne eines Extremalprinzips gefunden zu haben, ist jedoch falsch. Tatsächlich wird eine andere Formgebung der Rampe zu einer anderen Wellenlänge führen. Dies hat dann übrigens die bemerkenswerte Konsequenz, daß man an Boden und Deckel verschiedenartige Rampen einführen kann, die in der selektierten Wellenlänge nicht übereinstimmen. Dann sind die resultierenden Rollen nicht mehr stationär, sondern driften von der Rampe weg, welche die kleinere Wellenlänge selektiert, hin zu der Rampe, welche die größere Wellenlänge selektiert [7]. Noch interessanter wird die Situation, wenn die Rampe so konstruiert wird, daß sie eine Wellenlänge selektiert, die nach dem Eckhaus-Mechanismus instabil wird. Dann werden ständig Rollen vernichtet, die aus der Rampe nachgeliefert werden, wie in der

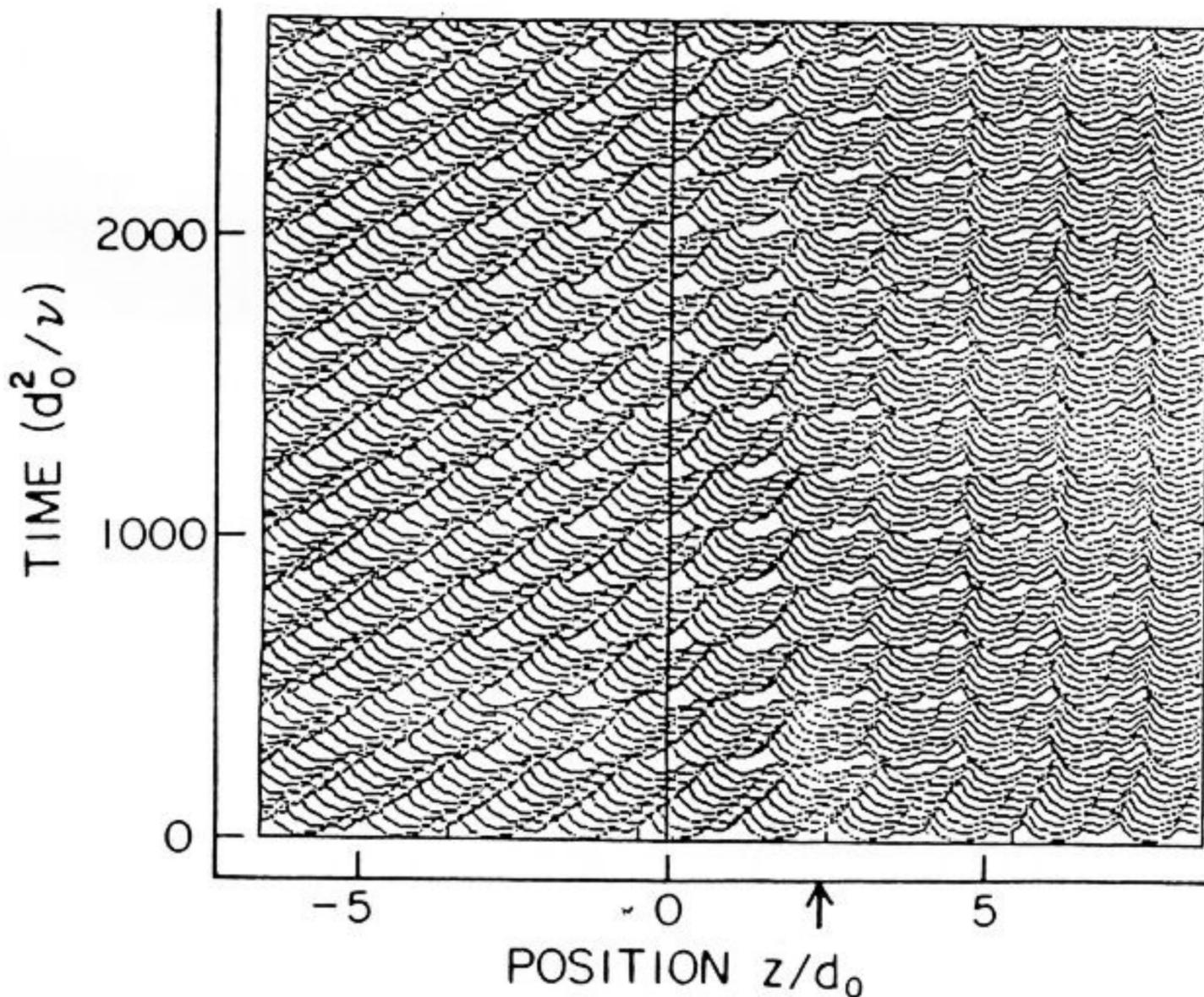


Abbildung 7: Selektion Eckhaus-instabiler Taylor-Wirbel mit Hilfe einer Rampe.

Messung unten demonstriert [8].

Es ist sehr bemerkenswert, daß dieses Phänomen sich aus der Phasendifusionsgleichung verstehen läßt [5].

2.3 Wanderwellen

Wandernde Muster können nicht nur durch Rampen entstehen, sondern auch eine intrinsische Eigenschaft der Instabilität sein. Dies soll an Hand der Rayleigh-Bénard Konvektion, der möglicherweise populärsten hydrodynamischen Instabilität, erläutert werden. Hier wird eine Flüssigkeitsschicht von unten erwärmt. Weil die erwärmte Flüssigkeit sich ausdehnt daher leichter ist als die in den oberen Schichten, ist die Situation instabil. Es kommt oberhalb einer wohldefinierten kritischen Temperaturdifferenz zwischen Boden und Deckel zur Bildung von Konvektionsrollen. Um diese Instabilität zunächst möglichst ähnlich zu den Taylor-Wirbeln zu belassen, machen wir den Apparat sehr kurz in Richtung der Rollenachsen: dieser Konvektionskanal erlaubt dann nur einen quasi-eindimensionalen Strukturbildungsprozeß. Die resultierenden Konvektionsmuster sind allerdings bei Verwendung einer einfachen Flüssigkeit wie Wasser auch nur stationär, d.h. den Taylor-Wirbeln qualitativ gleichwertig.

Das ändert sich, wenn man als Fluid eine binäre Mischung etwa von Wasser und Alkohol verwendet. In diesem Fall führt die Thermodiffusion zu Konzentrationsgradienten und damit Dichtegradienten innerhalb des Fluids. Konkret kommt es (bei hinreichender Verdünnung des Alkohols) zu einer erhöhten Konzentration des schwereren Wassers an der unteren, wärmeren Platte. Dies ist also zunächst ein stabilisierender Effekt, d.h. die Thermodiffusion wirkt der thermischen Ausdehnung entgegen. In diesem Flüssigkeitsgemisch wird die Konvektion oszillatorisch einsetzen. Um sich das klar zu machen, vergegenwärtige man sich die Bewegung einer Rolle: Am Ort der Aufwärtsströmung (Abwärtsströmung) wird warme (kalte), wässrige (alko-

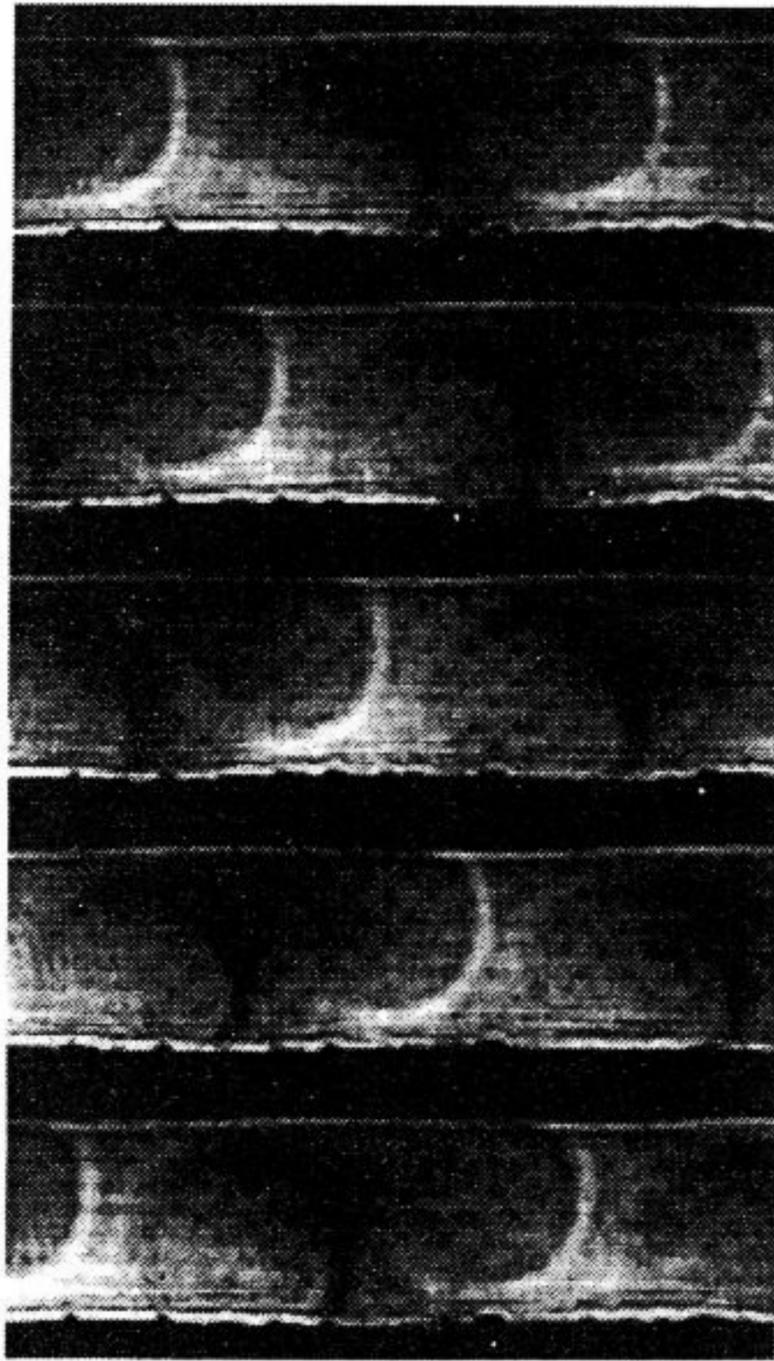


Abbildung 8: Wanderwellen in der Konvektion binärer Mischungen.

holhaltige) Lösung zur kälteren (wärmeren) Platte hin bewegt. Infolgedessen kühlt sie sich ab (erwärmt sie sich) und ist als stark wasserhaltige (alkoholisierte) Lösung jetzt schwerer (leichter) als ihre Umgebung. Daher wird die Strömungsrichtung sich nach einiger Zeit umkehren, und der gleiche Vorgang spielt sich mit vertauschten Rollen ab, d.h. es kommt zu Oszillationen. Diese können in räumlich ausgedehnten Systemen entweder als Stehwellen oder als Wanderwellen auftreten. Letztere werden durch die in Bild 9 dargestellte Messung demonstriert [9]. Zur Sichtbarmachung findet hier das sogenannte Schattenverfahren Verwendung, bei dem man paralleles Licht durch die Flüssigkeitsschicht schickt. Die Dichteunterschiede im Fluid führen zu einem räumlich modulierten Brechungsindex, welcher dafür sorgt, daß Licht zu den optisch dichteren (d.h. kälteren) Zonen hin gebrochen wird. Diese erscheinen dann also in der Durchsicht heller als vorher, und die wärmeren Zonen dunkler. Das Schattenverfahren ist übrigens eines der ältesten Verfahren zur qualitativen Charakterisierung von Strömungsfeldern. Durch die Verbreitung von CCD-Kameras in Verbindung mit Video-Digitalisierern hat es in den letzten Jahren auch zunehmend Bedeutung als quantitative Methode gefunden [10]. Es ist von großer Empfindlichkeit. Unter günstigen Umständen gelingt es, Temperaturvariationen im μK -Bereich zu vermessen [11].

Auch diese Wanderwellen lassen sich im Rahmen einer Amplitudengleichung beschreiben. In diesem Fall liefert die lineare Stabilitätsanalyse einen nicht verschwindenden imaginären Eigenwert, welcher genau wie die kritische Wellenlänge von der Amplitude abgespalten wird [5].

Wenn die System gegen Wanderwellen instabil wird, muß man zur Charakterisierung des physikalischen Zustandes ein neues Begriffspaar einführen: Konvektive Instabilität versus absoluter Instabilität. Es läßt sich gut an Hand der unten gezeigten Messung verdeutlichen[11]:

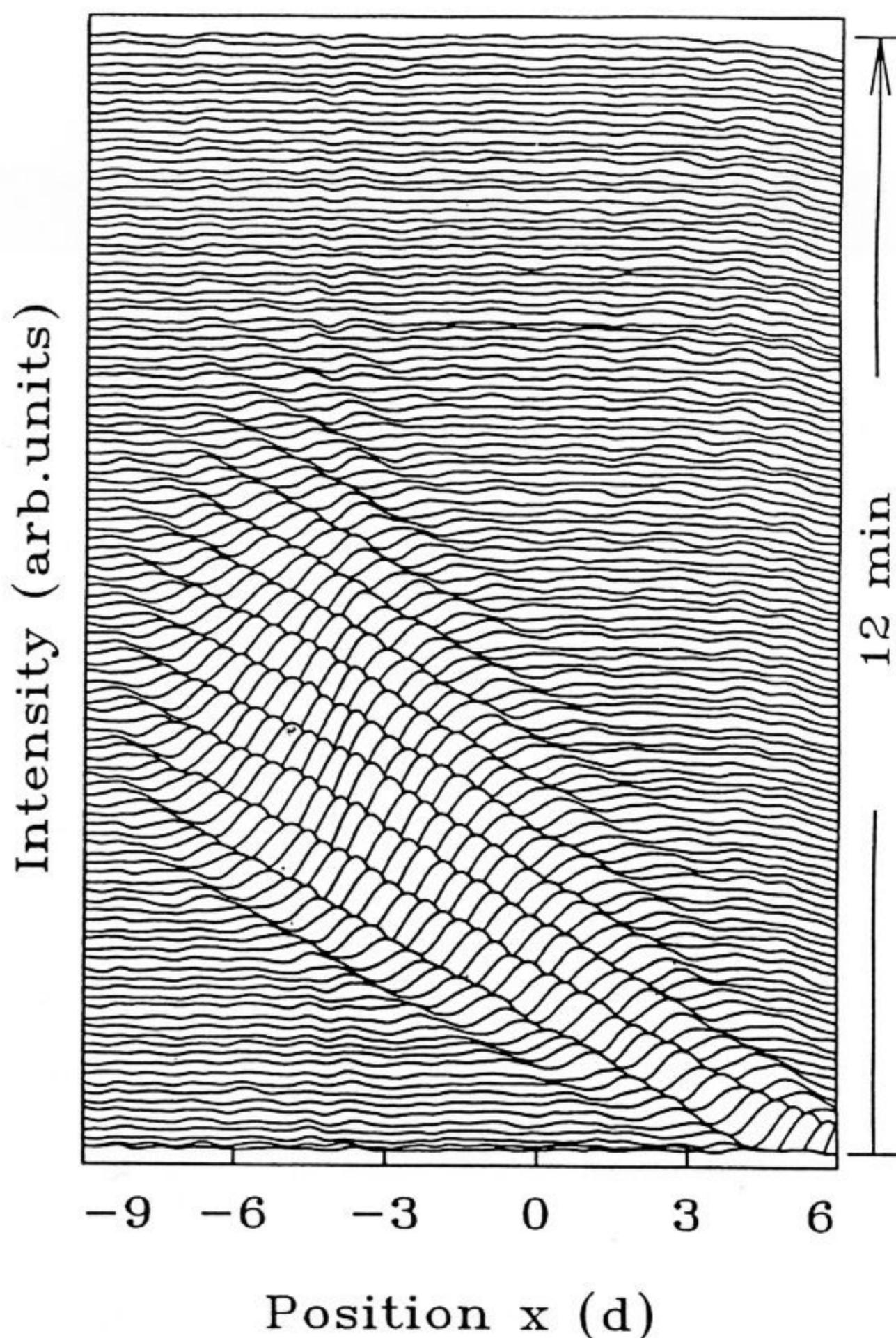


Abbildung 9: Demonstration der konvektiven Instabilität von Wanderwellen.

Ist das System (nur) konvektiv instabil, wächst eine kleine Störung im mitbewegten Koordinatensystem an, klingt dagegen am Ort der anfänglichen Störung wieder ab. Ist es dagegen absolut instabil, wächst die Störung auch lokal an, die Anwachsrate ist also schneller als die Gruppengeschwindigkeit. Selbst diesen Effekt kann man noch in eine Amplitudengleichung aufnehmen, welche dann die folgende Gestalt hat:

$$\tau_0(\partial_t + s\partial_x)A = \epsilon(1 + ia)A + \xi_{\parallel}^2(1 + ib_{\parallel})\partial_{xx}^2 A - g(1 + ic)|A|^2 A$$

wobei s die Gruppengeschwindigkeit darstellt. Die Vorfaktoren sind jetzt komplex, um der Dispersion der Wellen im Rahmen dieser Beschreibung Rechnung tragen zu können (s. [5]).

3 Strukturbildung in quasi-zweidimensionalen Systemen

Noch reichhaltiger werden die Strukturbildungsphänomene, wenn man von des bisher besprochenen quasi-eindimensionalen Systemen zu 2-dimensionalen übergeht. Als einfachsten Fall wird man ein anisotropes zweidimensionales System betrachten, um den Strukturen eine reproduzierbare Raumrichtung aufzuzwingen. Die Anisotropie kann etwa durch die Formgebung des Behälters erzwungen werden, sie kann aber auch eine intrinsische Eigenschaft der Flüssigkeit sein, wie etwa im Falle der im Zusammenhang mit dem Fréedericksz-Übergang eingeführten nematischen Flüssigkristalle. Tatsächlich kann man an die dort verwendete Zelle einen Temperaturgradienten anlegen, welcher dann zur anisotropen thermischen Konvektion führen wird.

Häufig zieht man es jedoch vor, die Konvektion mit einem elektrischen Feld zu erzeugen, weil sich dies viel genauer, einfacher und schneller kontrollieren läßt. Dies gelingt, wenn man die gleiche Geometrie wie bei der oben beschriebenen Zelle zur Demonstration des Fréedericksz-Übergangs verwendet. Man muß das Material allerdings zusätzlich mit elektrischen Ladungsträgern versehen. Der Mechanismus der Konvektionserzeugung beruht dann wesentlich auf der Anisotropie der elektrischen Leitfähigkeit: Eine kleine Deformation des Direktorfeldes führt zu Raumladungen, an denen elektrische Kräfte angreifen können, welche die Ursache für eine Strömung sind. Die Strömung ist dann so gerichtet, daß die ursprünglich kleine Auslenkung des Direktorfeldes verstärkt wird. Die resultierenden Konvektionsrollen stehen (in der Regel) senkrecht zur Vorzugsrichtung des planar ausgerichteten Flüssigkristalls, die Konvektion ist also anisotrop.

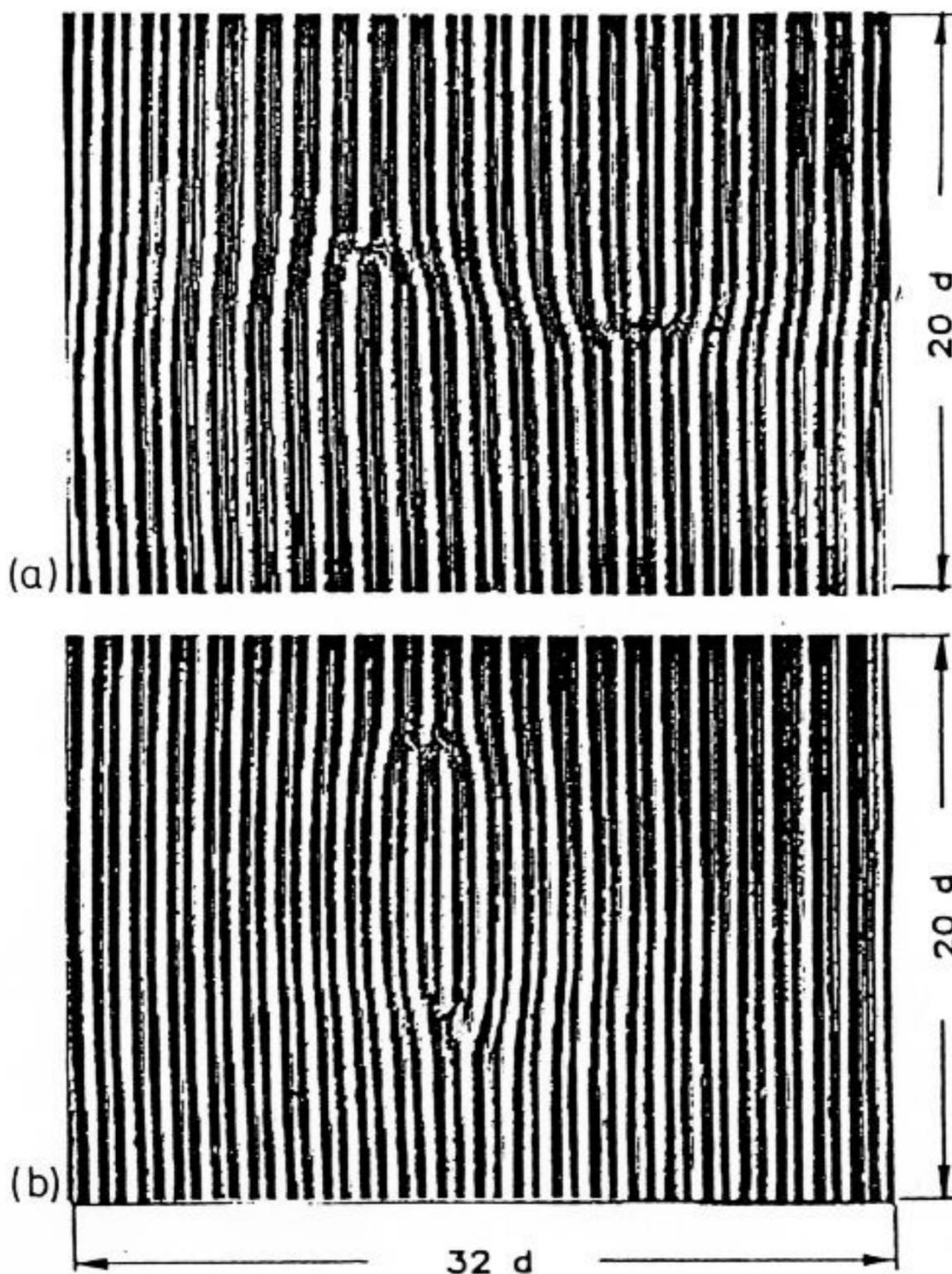


Abbildung 10: Konvektionsmuster im nematischen Flüssigkristall.

Auch für diesen Konvektionstyp gibt es wieder einen kritischen Schwellwert für den äußeren Kontrollparameter. Bild 10 stellt eine Aufnahme der sich oberhalb der kritischen Schwellspannung einstellenden Konvektionsmuster dar.

Zur Aufnahme dieses Bildes wurde der Flüssigkristall mit polarisiertem Licht durchstrahlt, wobei die Richtung der Polarisation parallel zur Ausrichtung des planar orientierten Flüssigkristalls ist. Es kommt dann zur Ablenkung der Lichtstrahlen, die dem oben erwähnten Schattenverfahren recht ähnlich ist. Im Falle des Flüssigkristalls spielt jedoch die optische Anisotropie des Materials die entscheidende Rolle. Im Bild 10 deuten die dickeren hellen Linien die Lage der Aufwärtsströmung an, und in dem weniger intensiven hellen Linien fließt der Nemat vom Betrachter weg. Das Verfahren ermöglicht aber nicht nur eine qualitative Beurteilung des Störungfeldes, sondern ist auch für eine quantitative Analyse sehr gut geeignet. Außerdem handelt es sich um eine recht empfindliche Methode, man kann damit Drehungen des Direktorfeldes in der Größenordnung von einem mrad nachweisen [12].

Die elektrische Konvektion ist übrigens nicht bei jeder Spannung so regelmäßig wie im Bild 10 gezeigt, sondern wird bei hinreichend großer Spannung „turbulent“, das Muster wird räumlich unregelmäßig und fluktuiert heftig. Diese Erscheinung ist von einer gut sichtbaren Lichtstreuung der Flüssigkeit begleitet, das Kristall erscheint trübe. Historisch war dieser sogenannte „dynamic scattering mode“ der erste Typ einer Flüssigkristallanzeige. Das Verfahren hat sich jedoch nicht durchgesetzt, weil es insbesondere bei batteriegetriebenen Geräten zu viel Energie verbrauchen würde. Die gängigen LCDs beruhen vielmehr auf einer Variante des oben vorgestellten Fréedericksz-Übergangs, der im Prinzip stromlos vor sich geht.

Von besonderem Interesse im Bild 10 sind die Defekte in dem regelmäßigen Muster. Ihre Ähnlichkeit mit Fehlstellen im Kristall ist sehr suggestiv. Ein Defekt vermittelt zwischen aufwärts und abwärts gerichteter Strömung, in seinem Kern ist die Geschwindigkeit also Null. Der Defekt beeinflusst seine Umgebung, wobei sein Einflußbereich in der Nähe des Schwellwertes sehr groß wird. Weil Defekte auch dicht am Schwellwert existieren (sie sind aus topologischen Gründen stabil), kann man sie mit Hilfe einer schwach nichtlinearen Entwicklung beschreiben. Ein schönes Beispiel hierfür ist die im Bild 11 gezeigte Wechselwirkung zwischen 2 Defekten, die sich gegenseitig anziehen und schließlich vernichten.

Hier wurde der Abstand zwischen zwei Defekten als Funktion der Zeit vermessen. Die obere Messung wurde bei einem Wert des Kontrollparameters von 0.033 und die untere bei 0.06 durchgeführt. Die durchgezogene Linie ist aus einer numerischen Integration der zweidimensionalen Amplitudengleichung

$$\tau_0(\partial_t)A = \epsilon A + \xi_{\parallel}^2 \partial_{xx}^2 A + \xi_{\perp}^2 \partial_{yy}^2 A - g(1 + ic)|A|^2 A$$

gewonnen und beschreibt diesen Vorgang offenbar sehr gut [13]. Die gestrichelte Linie korrespondiert zu einer anderen Theorie, die sich jedoch nicht durchsetzen konnte [1].

Es ist sehr bemerkenswert, daß das Konzept der Amplitudengleichungen, nämlich die Aufspaltung des Musters in eine periodische Funktion und eine langsam variierende Einhüllende im Fall dieser experimentellen Untersuchungen sogar die Meßtechnik befruchtet hat. Für die in Bild 11 gezeigten Meßwerte des Abstands der Defekte war eine genaue Lokalisierung der Defektkerne notwendig. Diese erfolgte über die aus der Theorie nahegelegte Aufspaltung mit Hilfe einer räumlichen diskreten Fouriertransformation des Bildes [13].

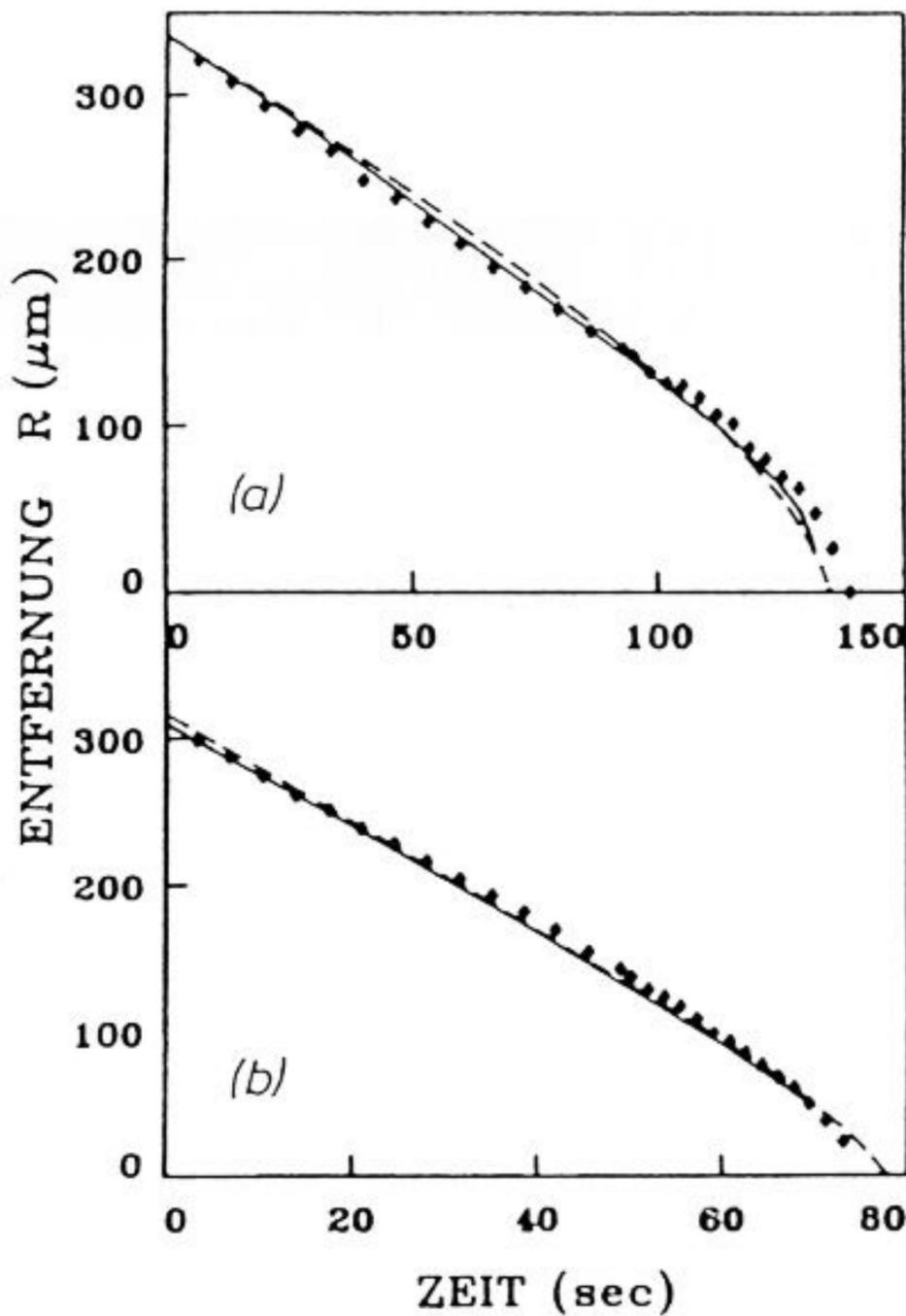


Abbildung 11: Die Vernichtung eines Defektpaares.

4 Thermische Fluktuationen

In der Nähe der Instabilität divergiert die Suszeptibilität der Mode mit der kritischen Wellenzahl. Daher darf man erwarten, in der Nähe dieses Schwellwertes große Fluktuationen dieser Mode zu beobachten. Dies ist in der Tat der Fall, wie das untere Bild belegt [14, 15, 16]. Diese Aufnahme wurde im Fall der elektrisch getriebenen Konvektion dicht unterhalb des Schwellwertes gemacht. Sie zeigt Ansätze zur Strukturbildung, die jedoch nicht stationär sind. Vielmehr fluktuieren die Muster in einer unregelmäßigen Weise. Zum Vergleich ist darüber auch die Aufnahme der deterministischen Struktur gezeigt, die sich oberhalb der Instabilität bildet.

Auch diese stochastischen Erscheinungen sind mit Hilfe einer Amplitudengleichung beschreibbar, wenn man nach Art der Langevin-Gleichung einen Zusatzterm in die Gleichung aufnimmt gemäß:

$$\tau_0 \partial_t A = \epsilon A + \xi_{\parallel}^2 \partial_{xx}^2 A + \sqrt{Q} F(x, t),$$

$$\langle F(x, t) F(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$$

Dabei ist die Größe des Rauschterms Q im wesentlichen durch das Produkt aus der Boltzmann-Konstanten und der absoluten Temperatur $k_B T$ bestimmt. Die Gleichung wurde hier mit dem linearen Term abgebrochen, weil wegen der außerordentlichen Kleinheit der Fluktuationen eine lineare Beschreibung ausreichend erscheint. Ob man die Einflüsse einer nichtlinearen Wechselwirkung in der Nähe der Schwelle experimentell wird auflösen können, ist gegenwärtig noch unklar.

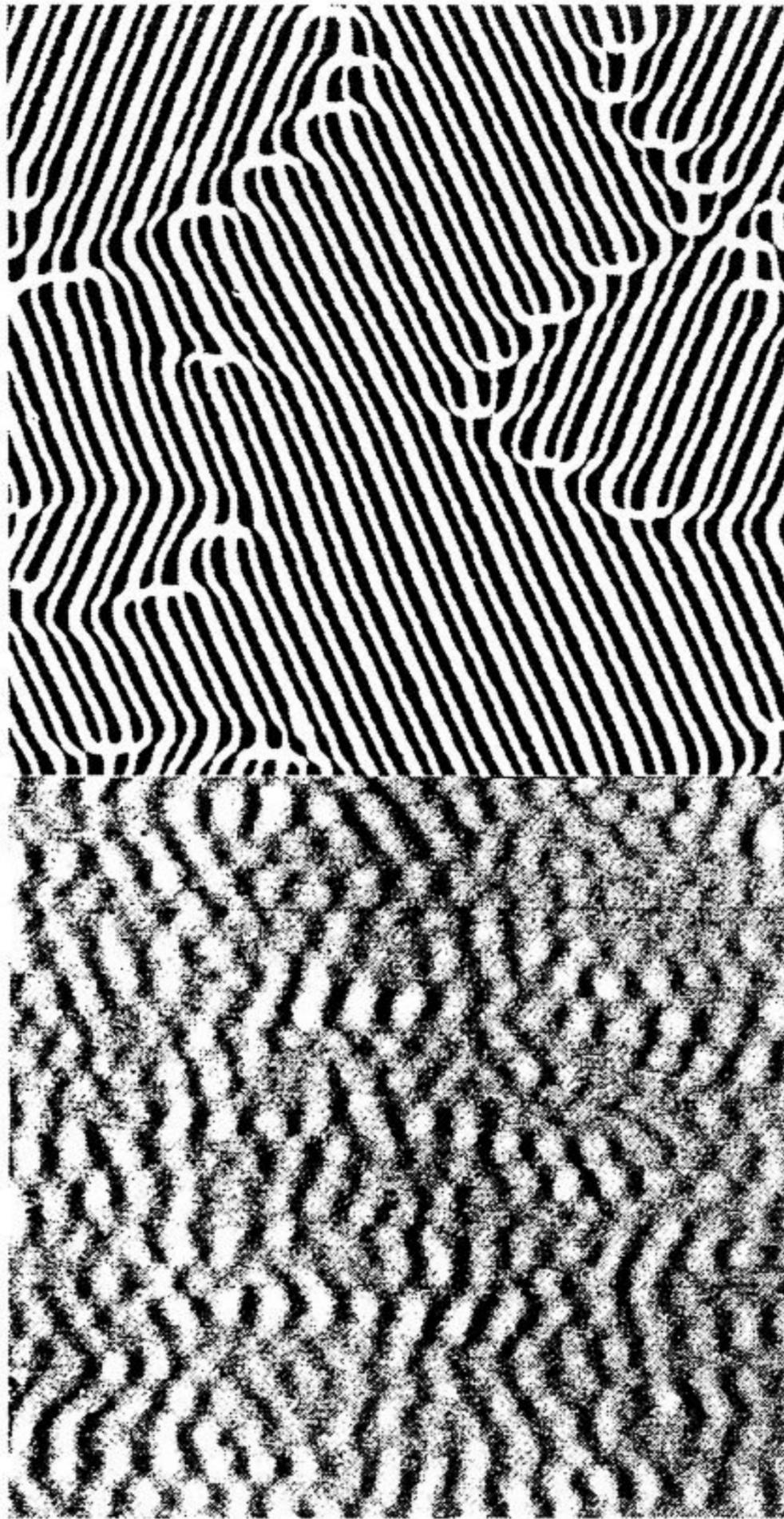


Abbildung 12: Deterministische Schrägrollen und fluktuierende Konvektionsmuster

5 Zusammenfassung und Überleitung

Zusammenfassend haben wir eine Fülle von Erscheinungen in der Nähe einer strukturbildenden Instabilität kennengelernt. Dabei wurde jeweils angedeutet, daß sich die jeweiligen Erscheinungen durch ein universelles Konzept, die Amplitudengleichung, beschreiben lassen, deren Ableitung im nächsten Vortrag [5] an ausgewählten Beispielen erläutert wird.

Literatur

- [1] M.C. Cross and P.C. Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, Review of Modern Physics **65**, 851 (1993).

- [2] B. L. Winkler, H. Richter, I. Rehberg, W. Zimmermann, L. Kramer, A. Buka, *Nonequilibrium Patterns in the Electric Field Induced Splay Fréedericksz Transition*, Phys. Rev. **A43**, 1940-1951 (1991).
- [3] I. Rehberg, *Phasenübergänge und hydrodynamische Instabilitäten*, Physik in unserer Zeit **12**, 131-137 (1981).
- [4] M. A. Dominguez-Lerma, D.S. Cannell, and G. Ahlers, *Eckhaus Boundary and Wavenumber Selection in Rotating Couette-Taylor Flow*, Phys. Rev. **A34**, 4956 (1986).
- [5] siehe den Überblick von W. Zimmermann in diesem Buch.
- [6] G. Pfister and I. Rehberg, *Space-Dependent Order Parameter in Circular Couette Flow Transitions*, Physics Letters **83A**, 19-22, (1981).
- [7] I. Rehberg, E. Bodenschatz, B. Winkler, F. H. Busse, *Forced Phase Diffusion in a Convection Experiment*, Phys. Rev. Lett. **59**, 282-284, (1987).
- [8] L. Ning, G. Ahlers, and D.S. Cannell *Wavenumber Selection and Travelling Vortex Waves in Spatially Ramped Taylor-Couette Flow*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1235 (1990).
- [9] B.L.Winkler, and P.Kolodner, *Measurements of the concentration field in nonlinear travelling-wave convection*, J. Fluid Mech. **240**, 31-58 (1992).
- [10] S. Rasenat, G. Hartung, B. L. Winkler, and I. Rehberg, *The shadowgraph method in convection experiments*, Experiments in Fluids **7**, 412-420 (1989).
- [11] W. Schöpf and I. Rehberg, *Amplification of Thermal Noise via Convective Instability in Binary-Fluid Mixtures*, Europhysics Letters **17**, 321-326 (1992).
- [12] B. L. Winkler, W. Decker, H. Richter, and I. Rehberg, *Measuring the growth rate of electroconvection by means of thermal noise*, Physica D **61**, 284-288 (1992).
- [13] S. Rasenat, V. Steinberg, and I. Rehberg, *Experimental studies of Defect Dynamics and Interaction in Electrohydrodynamic Convection*, Phys.Rev.A **42**, 5998-6008 (1990).
- [14] I. Rehberg, S. Rasenat, M. de la Torre Juárez, W. Schöpf, F. Hörner, G. Ahlers, and H. R. Brand, *Thermally Induced Hydrodynamic Fluctuations below the Onset of Electroconvection*, Phys. Rev. Lett. **67**, 596-599 (1991).
- [15] I. Rehberg, F. Hörner, L. Chiran, H. Richter, and B. L. Winkler, *Measuring the Intensity of Director Fluctuations below the Onset of Electroconvection*, Physical Review A **44**, R7885-R7887 (1991).
- [16] I. Rehberg, F. Hörner and G. Hartung, *The measurement of subcritical Electroconvection*, J.Stat.Phys. **64**, 1017-1023 (1991).